Zdravko Galić

Gradjevinski fakultet
Hasana Brkića 24
71000 Sarajevo

JEDNA MOGUĆNOST POVEĆANJA ALGORITAMSKE EFIKASNOSTI KOD IZRAVNANJA GEODETSKIH MREŽA

Neizostavni dio softvera za izravnanje geodetskih mreža predstavlja jedan podskup operacija matrične algebre, odnosno algoritmi za množenje, LU dekompoziciju* i inverziju matrica.

Kompleksnost ovih algoritama je od presudnog značaja za njegovu globalnu efikasnost, pa su glavni napori u sintezi algoritama vezani upravo za ove operacije. Kako sintezu algoritama i odgovarajuće strukture podataka nad kojima oni operišu treba posmatrati zajedno, u daljem izlaganju smatramo da su sve relevantne matrice reprezentovane dvodimenzionalnim nizovima.

Bez obzira na korišteni metod LU dekompozicije za potrebe rješavanja sistema normalnih jednačina, ili za potrebe inverzije matrice koeficijenata normalnih jednačina, za sve je karakteristično da se javlja potreba za množenjem odredjenih vrsta i/ili kolona matrica, a ista potreba se naravno javlja i kod operacije množenja matrica. Ovakve proizvode možemo posmatrati i kao proizvod dva vektora. Označimo li ta dva vektora sa X i Y, tada je njihov proizvod definisan poznatom relacijom:

$$C = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (1)$$

---

* LU dekompozicija - dekompozicija pozitivno definitne simetrične matrice u proizvod dvije trouglaste matrice

Za ovaj proizvod neophodno je obaviti n operacija množenja i n-1 operaciju sabiranja. Poznato je da je za množenje dvije kvadratne matrice potrebno n^3 operacija množenja i n^3-n^2 operacija sabiranja. Generisanje gornjeg ili donjeg dijela matrice koeficijenata normalnih jednačina na osnovu matrice koeficijenata jednačina grešaka dimenzija nxn zahtijeva obavljanje $n^3/2+n/2$ operacija množenja i $n^3/2-n/2$ operacija sabiranja.

Za LU dekompoziciju matrice koeficijenata normalnih jednačina metodom Choleskog potrebno je $n^3/6+0(n^2)$* operacija množenja i sabiranja. (Ovdje ne pravimo razliku izmedju operacija sabiranja i oduzimanja). Imajući u vidu činjenicu da je za izvršenje operacije množenja potrebno više procesorskog vremena, nego za operaciju sabiranja, eventualnim smanjivanjem broja operacija množenja, može se očekivati i smanjivanje potrebnog procesorskog vremena za izvršenje ovih algoritama.

Razmotrimo sljedeću relaciju kojom je definisan proizvod dva vektora sa n elemenata (n je paran broj):

$$C=\sum_{i=1}^{n/2}(x_{2i-1}+y_{2i})(x_{2i}+y_{2i-1})-\sum_{i=1}^{n/2}x_{2i-1}x_{2i}-\sum_{i=1}^{n/2}y_{2i-1}y_{2i} \qquad (2)$$

Primjenjujući ovu relaciju za množenje dvije kvadratne matrice, ukupan broj operacija množenja i sabiranja je $n^3/2+n^2$ i $3n^3/2+2n^2-2n$, respektivno. Tada je i generisanje gornjeg (ili donjeg) dijela matrice koeficijenata normalnih jednačina moguće obaviti sa $n^3/4+3n^2/4$ operacija množenja i $n^3/2+3n^2/2+n$ operacija sabiranja. Za LU dekompoziciju metodom Choleskog potrebno je $n^3/12+0(n^2)$ operacija množenja i $n^3/4+0(n^2)$ operacija sabiranja.

* $0(f(n))$ - red kompleksnosti (dijela) algoritma

Očigledno je da relacija (2) povećava broj operacija sabiranja, medjutim bitno smanjuje broj operacija množenja, pa je njenom primjenom u razmatranim algoritmima, naročito kod većih matrica, moguće očekivati povećanje algoritamske efikasnosti i do 50%. Kao ilustraciju primjene relacije (2) prikazaćemo u formi procedure programskog jezika Pascal, algoritam za formiranje gornjeg dijela matrice koeficijenata normalnih jednačina, na osnovu matrice koeficijenata jednačina grešaka A dimenzija nxn, (n je paran broj) za mjerenja iste tačnosti.

```
procedure normalnejednacine(var A,N:matrica; n:integer);

type vektor = array[1..n] of real;

var  i,j,k,ndiv2 : integer;
     suma        : vektor;

begin
     ndiv2:=n div 2;
     for j:=1 to n do
        begin
            suma[j]:=0.0;
            for k:=1 to ndiv2 do
              suma[j]:=suma[j]+A[k+k-1,j]*A[k+k,j]
        end;
     for i:=1 to n do
        for j:=i to n do
           begin
               C[i,j]:=0.0;
               for k:=1 to ndiv2 do
                  C[i,j]:=C[i,j]+(A[k+k-1,i]+A[k+k,j])*
                                 (A[k+k,i]+A[k+k-1,j]);
               C[i,j]:=C[i,j]-suma[i]-suma[j]
           end
end; {normalnejednacine}
```

Da su pomenuta očekivanja u povećanju efikasnosti algoritama sasvim realna, pokazuju i eksperimentalni rezultati prikazani u tabelama 1 i 2. Naime, tabele sadrže potrebna procesorska vremena (u sekundama) za formiranje gornjeg dijela matrice koeficijenata normalnih jednačina i rješavanje takvih normalnih jednačina primjenom LU dekompozicije metodom Choleskog, korištenjem relacija (1) i (2). Ove relacije su u tabelama označene brojevima 1 i 2, a "n" označava dimenzije odgovarajućih matrica. Prezentirani rezultati su dobiveni na računaru IBM PC-XT, sa operativnim sistemom MSDOS v.3.3 i kompajlerom Turbo Pascal v.2.00B.

n	1	2	1/2
10	1.26	0.94	1.34
20	9.39	6.70	1.40
30	31.36	21.70	1.44
40	74.03	50.37	1.47
50	144.46	97.27	1.48
60	249.31	166.81	1.49
70	396.06	263.48	1.50
80	591.77	391.95	1.51
90	844.64	558.37	1.51
100	1157.06	762.03	1.52

Tabela 1.

CPU vremena i njihov relativni odnos za formiranje dijela matrice koeficijenata normalnih jednačina

n	1	2	1/2
10	0.99	0.99	1.0
20	5.22	4.56	1.15
30	15.55	12.35	1.26
40	34.21	25.76	1.33
50	63.88	46.52	1.37
60	107.71	76.13	1.41
70	167.74	116.44	1.44
80	246.23	169.23	1.46
90	346.53	236.40	1.47
100	471.92	318.95	1.48

Tabela 2.

CPU vremena i njihov relativni odnos za rješavanje sistema normalnih jednačina

LITERATURA

[1] Aho V.A.
Hopcroft E.J.
Ullman D.J. : "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1974.

[2] Brent R.P.: "Algorithms for matrix multiplication". Technical Report CS 157, Computer Sciences Department, Stanford University, 1980.

[3] Winograd S.: "A new algorithm for inner product", IEEE Transactions C-17, 693-694, 1978.