Prof.dr Smail Pašalić
Gradjevinski fakultet Sarajevo

DIMENZIJE SREDNJIH GREŠAKA I TEŽINA KOD RAZNORODNIH MJERENJA

O dimenzijama težina i srednjih grešaka nakon izravnanja u zadnje vrijeme se dosta raspravljalo i dolazilo do različitih zaključaka. Mada kod praktičnog izračunavanja dimenzije ne prave neke smetnje ipak za dublju analizu i sagledavanje problema, ovo pitanje ima svoj značaj. Radi toga autor ovoga rada želi iznijeti svoja razmišljanja i iskustva te predložiti metodologiju koja po mišljenju autora na logičan i jednoobrazan način rješava problem dimenzija kod svih vrsta mjerenja.

Polazimo od poznatog uslova minimuma za mjerenja različite tačnosti koji glasi:

$$\frac{v_1^2}{m_1^2} + \frac{v_2^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{v_n^2}{m_n^2} = \min. \qquad (1)$$

Ovaj uslov ostaje očuvan i kada ga pomnožimo sa nekom konstantom "k" proizvoljnom po veličini i dimenziji:

$$\frac{kv_1^2}{m_1^2} + \frac{kv_2^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{kv_n^2}{m_n^2} = \text{minimum} \qquad (2)$$

Kako znamo veličine $\frac{k}{m_i^2}$ označavaju se sa p_i $(p_i = \frac{k}{m_i^2})$ i nazivaju težinama, pa uslov (2) glasi:

$$p_i v_i^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2 = [pv^2] = \text{minim.} \qquad (3)$$

Mada je konstanta "k" proizvoljna po veličini i dimenziji za nju se, iz praktičnih razloga, za istorodna mjerenja usvaja da ima dimenziju kvadrata srednje greške $(m)^2$.

U daljem ćemo sa (vel.) označavati dimenziju veličine označene izmedju malih zagrada, a sa $|$vel.$|$ brojčanu vrijednost veličine označene izmedju pravih crtica.

Obzirom na to težine za jednorodna mjerenja glase:

$$p_i = \frac{|k|\,(m)^2}{|m_i|^2\,(m)^2} = \frac{|k|}{|m_i|^2},$$

a to znači neimenovani brojevi, pa uslov minimuma (1) ima dimenziju $(m)^2$

Za raznorodna mjerenja za "k" se usvaja da ima dimenziju kvadrata srednje greške jedne (po želji) vrste mjerenja. Nakon toga se brojčana vrijednost konstante k ($|k|$) može, kao i za istorodna mjerenja, proizvoljno odabrati.

Saglasno tome i težine u okviru jednog izravnanja moraju se odredjivati kao odnos ovako odabrane konstante i odgovarajućih kvadrata srednjih grešaka. Neka imamo, recimo, tri vrste mjerenja, nazovimo ih a, b i c.

Usvojimo da "k" ima dimenziju kvadrata srednje greške mjerenja a-$(m_a)^2$. U tom slučaju prema definiciji imamo:

$$p_{a_i} = \frac{|k|\,(m_a)^2}{|m_{a_i}|^2\,(m_a)^2} = \frac{|k|}{|m_a|^2}, \qquad p_{b_i} = \frac{|k|}{|m_{b_i}|^2}\,\frac{(m_a)^2}{(m_b)^2} \qquad \text{i}$$

$$p_c = \frac{|k|}{|m_{c_i}|^2}\,\frac{(m_a)^2}{(m_c)^2}, \qquad (4)$$

pa uslov minimuma (3) ima dimenziju $(m_a)^2$.

Izaberimo neko mjerenje iz a i za njega usvojimo težinu 1.

Srednju grešku jedinice težine koja odgovara ovako odabranom mjerenju označimo sa m_{oa}.

Kada na ovo mjerenje primijenimo opšti obrazac za težinu dobijamo:

$$1 = \frac{k}{m_{oa}^2} .$$

Odavde je $k = m_{oa}^2$, gdje je $m_{oa}^2 = \frac{[pvv]}{n-r}$ (srednja greška jedinice težine mjerenja a). Pošto smo usvojili da k ima dimenziju kvadrata srednje greške mjerenja a, to i m_{oa}^2 ima tu istu dimenziju:

$$m_{oa}^2 = |m_{oa}|^2 (m_a)^2 \qquad (5)$$

Srednju grešku jedinice težine za mjerenja b i c dobijamo iz opštih relacija:

$$m_{a_i}^2 \, p_{a_i} = m_{b_i}^2 \, p_{b_i} = m_{c_i}^2 \, p_{c_i}$$

Ove relacije u slučaju jediničnih težina glase:

$$m_{oa}^2 \, 1 = m_{ob}^2 \, 1 \, \frac{(m_a)^2}{(m_b)^2} = m_{oc}^2 \, 1 \, \frac{(m_a)^2}{(m_c)^2}$$

Odavde, s obzirom na relaciju (5), dobijamo:

$$\begin{aligned} m_{ob}^2 &= m_{oa}^2 \frac{(m_b)^2}{(m_a)^2} = |m_{oa}|^2 \frac{(m_a)^2}{(m_a)^2} (m_b)^2 = |m_{oa}|^2 (m_b)^2 \\ m_{oc}^2 &= m_{oa}^2 \frac{(m_c)^2}{(m_a)^2} = |m_{oa}|^2 \frac{(m_a)^2}{(m_a)^2} (m_c)^2 = |m_{oa}|^2 (m_c)^2 \end{aligned} \qquad (6)$$

ZAKLJUČAK

Ovim je pokazano (jednačine 5 i 6) da raznorodna mjerenja imaju više srednjih grešaka jedinice težine koje se medjusobno razlikuju samo po dimenzijama.

Iz relacija (4) se vidi da težine p_{a_i} nemaju dimenziju, dok težine p_{b_i} i p_{c_i} imaju naznačene dimenzije. Srednja greška jedinica težina m_{oa}, m_{ob}, i m_{oc}, kako pokazuju relacije (5) i (6) imaju dimenzije odgovarajućih srednjih grešaka $((m_a), (m_b)$ i $(m_c))$ što je i normalno.

Za konstantu k mogli smo usvojiti i neimenovan broj, kao što se to često radi, ali onda bi težine p_{a_i} imale dimenziju $\frac{1}{(m_a)^2}$ i srednja greška jedinice težine $m_{oa} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-r}}$ bila bi bezdimenziona veličina što nije normalno, jer po definiciji i srednja greška jedinice težine je srednja greška nekog mjerenja kome smo pripisali težinu jedan, pa je normalno da ima i dimenziju toga mjerenja. Nije ispravno ni fizikalno ni inženjerski reći: izmjerio sam, recimo neku dužinu od 1000 metara sa srednjom greškom 5(čega 5?). Ustvari mi bi u ovom slučaju dobili samo brojčanu vrijednost srednje greške:

$$|m_o| = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-r}} ,$$

pa bi je mogli tako i zvati, ali se onda komplikuju dimenzije kod ostalih grešaka, te smatramo da je predloženi način odredjivanja dimenzija težina, odnosno srednjih grešaka najprihvatljiviji.

Ovo potkrepljuje i činjenica da jedino predložena metodologija omogućava da na isti način odredjujemo dimenzije težina i srednjih grešaka kod svih vrsta mjerenja, bila ona jednorodna ili raznorodna i da te dimenzije budu odgovarajuće.

Tako za raznorodna mjerenja, za odabranu vrstu mjerenja, kako smo vidjeli dobijamo težine p_i kao neimenovane brojeve i srednju grešku jedinice težine sa odgovarajućom dimenzijom.

Ovo isto vrijedi i za jednorodna mjerenja, jer ovdje je data vrsta mjerenja ujedno odabrana vrsta mjerenja.

LITERATURA

[1] Muminagić, A.: Srednje kvadratno odstupanje jedinice težine, Geodetski list, 1986, 7-12, 189-192.

[2] Perović, G.: O srednjem kvadratnom odstupanju jedinice težine, Geodetski list, 1987, 4-6, 143-149.

[3] Milovanović,V.: Izravnanje raznorodnih mjerenja po metodi najmanjih kvadrata i normiranje mjerenja, Geodetska služba 1977.

REZIME

U radu se predlaže jedna metodologija odredjivanja dimenzija težina i srednjih grešaka