Prof.dr Smail Pašalić
Gradjevinski fakultet Sarajevo

SREDNJE GREŠKE KOORDINATA TAČAKA GEODETSKIH MREŽA I NJIHOV PRAKTIČNI SMISAO

UVOD

U novijoj geodetskoj literaturi pa donekle i praksi pored postojećih (standardnih) srednjih grešaka koordinata tačaka mreža, pojavile su se i nove srednje greške ovih koordinata.

Ove nove srednje greške nazvane su relativne, ili unutrašnje, pa shodno tome uveden je i pojam "Unutrašnja teorija grešaka".

Cilj ovog rada je da pokaže, da ove nove srednje greške nemaju praktičnog smisla te ih geodezija kao nauka koja počiva na praktičnim potrebama, ne treba izučavati, a pogotovo primjenjivati.

1. POSTOJEĆE (STANDARDNE) SREDNJE GREŠKE KOORDINATA

Razmatraćemo mreže koje su mjerenim ili datim veličinama, u pogledu oblika i razmjere (u granicama tačnosti mjerenja) potpuno definisane. Dakle, riječ je o mrežama čiji je relativan odnos izmedju njihovih elemenata odredjen (nemaju u tom smislu nikakvih defekata - ništa im ne fali). Radi daljeg korištenja podvlači se pojam dati spoljni elemenat geodetske mreže. Dati spoljni elemenat geodetske mreže je veličina (parametar) koji povezuje mrežu sa koordinatnim sistemom. Takvi elementi su: date koordinate, dati direkcioni uglovi ili drugi dati parametri koji neposredno ili posredno povezuju mrežu i koordinatni sistem.

Minimalan broj datih spoljnih elemenata, koji definišu mrežu kao cjelinu u nekom koordinatnom sistemu je 3 (tri). Oblik i razmjera ovih mreža, nakon izravnanja, neće zavisiti od ta tri elementa, pa ćemo takve mreže nazivati slobodnim mrežama. Za razliku od slobodnih mreža imamo mreže u kojima je dato više spoljnih elemenata i čiji će oblik, nakon izravnanja zavisiti od tih elemenata, pa ćemo takve mreže nazivati neslobodnim mrežama.

U odnosu na tri data spoljna elementa, u slobodnim mrežama, računaju se koordinate i njihove srednje greške. Dakle, u odnosu na ta tri elementa jednoznačno su odredjene i koordinate i srednje greške tih koordinata. Nije ispravno mišljenje da ovako sračunate srednje greške daju informaciju o tačnosti u odnosu na koordinatni početak.

Naime, to je samo uslovno djelimično tačno i to ako smo za dva elementa orijentacije usvojili koordinate jedne tačke i ako smo koordinatni početak smjestili u tu tačku. Samo u tom slučaju srednje greške bi se odnosile na koordinatni početak, ali i na odabrani treći elemenat orijentacije. Za različito odabrani treći elemenat orijentacije dobili bi i različite srednje greške tačaka mreže. Ovo se lako pokazuje numeričkim primjerom. Ako koordinatni početak nije u datoj tački, onda zaista ove greške nemaju nikakve veze sa koordinatnim početkom.

Isto tako, ako imamo neslobodnu mrežu (recimo da imamo više datih tačaka) onda će se srednje greške ostalih koordinata dobiti u odnosu na te date tačke.

Dakle, slobodna mreža ne pravi nikakav izuzetak u pogledu ocjene tačnosti koordinata njenih tačaka. Ovo je jasno otuda što čim smo nekoj mreži pripisali koordinatni sistem, ona postaje vezana za taj sistem pa bila ona slobodna ili neslobodna i nema razloga da se numerička obrada, kao i tumačenje dobijenih rezultata slobodne mreže razlikuje od bilo kakve neslobodne mreže.

Geometrijsko tumačenje, odnosno praktični smisao ovih grešaka vidljiv je iz posmatranja koordinata grešaka konkretne mreže. Naime, veličina i pravac srednje greške neke tačke mreže govori pored tačnosti mjerenja koliko je ta tačka udaljena i kako je geometrijski povezana sa datim spoljnim elementima.

2. NOVE (RELATIVNE) SREDNJE GREŠKE KOORDINATA

Ove srednje greške odnose se samo na slobodne geodetske mreže. One se dobiju kada se mreži pored uslova $[pvv]=min.$ nameće i dodatni uslov $[\Delta x \Delta x]=min.$ Ovaj dodatni uslov ne kvari standardni uslov $[pvv]=min$, nego samo još zahtijeva da izravnate koordinate budu takve da je suma kvadrata razlika njih i njihovih približnih vrijednosti minimalna.

Ovo drugim riječima znači da na standardan način izravnatu slobodnu mrežu uklapamo Helmertovom transformacijom u mrežu tačaka koje imaju približne koordinate. Dakle, svaka približna tačka smatra se datom, pa se na bazi toga odredjuju (rasporedjuju) srednje greške koordinata izravnatih tačaka.

Analitički dokaz za ovu tvrdnju je slijedeći:
Izravnanjem slobodne mreže na uobičajen način, tj. pod uslovom $[PVV]=$ minimum, dobijamo:

$$X = -N^{-1}H = -Q_x H \qquad (1)$$

gdje su:

$$X^* = \| x_1 y_1 \;\ldots\ldots\; x_n y_n \| , \quad H^* = \| [pat]\,[pbf] \ldots\; [puf] \|$$

$$N=\begin{Vmatrix}[paa] & [pab] & \dots & [pau]\\ [pab] & [pbb] & \dots & [pbu]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [pau] & [pub] & \dots & [puu]\end{Vmatrix}, N^{-1}=Q_x=\begin{Vmatrix}q_{x_1x_1} & q_{x_1y_1} & \dots & q_{x_1y_n}\\ q_{x_2x_1} & q_{x_2x_2} & \dots & q_{x_2y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_{y_nx_1} & q_{y_xy_i} & \dots & q_{y_ny_n}\end{Vmatrix}$$

Sada ovu mrežu Helmertovom transformacijom uklapamo u mrežu približnih koordinata koje smo u odredjenim granicama radi odredjivanja rješenja X, proizvoljno odabrali.

Obilježimo ovo približno rješenje sa $X_o^* = \| x_1^o \ y_1^o \dots, x_n^o \ y_n^o \|$, vektor popravaka obilježimo sa $\Delta X^* = \|\Delta x_1 \Delta y_1 \dots \Delta x_n \Delta y_n\|$ i vektor konačnih transformisanih koordinata sa $X'^* = \| x_1' \ y_2' \dots x_n' \ y_n' \|$.

S obzirom na ove oznake jednačine za Helmertovu transformaciju glase:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i^o + \Delta x_i = x_i + \alpha x_i - \beta y_i + a \\ y_i &= y_i^o + \Delta y_i = y_i + \alpha y_i + \beta x_i + b \end{aligned} \qquad (2)$$

ili u matričnom obliku

$$X'^* = X_o + \Delta X = X + AY \qquad (3)$$

Odavde je:

$$\Delta X = AY + X - X_o \qquad (4)$$

gdje su

$$Y^* = \| \alpha \quad \beta \quad a \quad b \|$$

$$A = \begin{Vmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Jednačinu (4) kako je poznato rješavamo uz uslov

$\Delta X \cdot \Delta X = [\Delta x \Delta x] = \min$, pa dobijamo:

$$Y = -(A^* A)^{-1} A^* (X - X_o) \qquad (5)$$

Kada (5) smjenimo u (3) dobijamo

$$X'^* = X - A(A^* A)^{-1} A^* (X - X_o) = [E - A(A^*A)^{-1} A^*] X + A(A^*A)^{-1} A^* X_o$$

Korelaciona matrica ovako dobijenih (transformisanih) koordinata iznosi:

$$Q_{x'} = [E - A(A^*A)^{-1} A^*] \, Q_x [E - A(A^*A)^{-1} A^*] + A(A^*A)^{-1} A^* Q_{x_o} A(A^*A)^{-1} A^* \qquad (6)$$

Ka a se usvoji da su približne koordinate date tačke (bez pogrešne) onda kako znamo $Q_{x_o} = 0$, pa je:

$$Q_{x'} = [E - A(A^*A)^{-1} A^*] \, Q_x [E - A(A^*A)^{-1} A^*] \qquad (7)$$

a to je (od više autora pokazano) jednako korelacionoj matrici dobijenoj Mittermayerovim postupkom. Na ovaj način je i analitički pokazano da se nakon standardnog izravnanja slobodne mreže i dodavanja uslova

$$\Delta x \Delta x = \min.,$$

uz pretpostavku, da je $Q_{x_o} = 0$ dobija ista korelaciona matrica kao i zajedničkim nametanjem uslova: $[pvv] = \min$ i $[\Delta x \Delta x] = \min$.

Dakle, metoda Mittermayera podrazumijeva da je nužno da približne koordinate budu date (konstante) veličine.

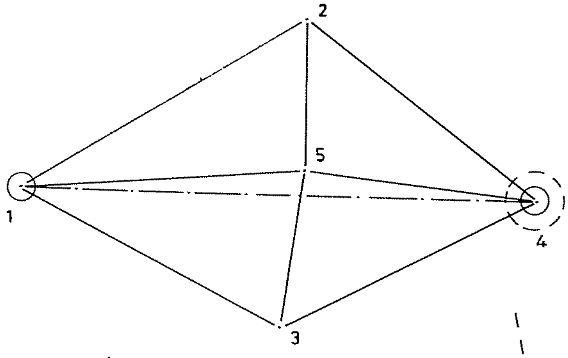
Da pomenuti uslovi nisu zajedno nametnuti, nego prvo $[pvv] = \min$, pa nakon izravnanja uslov $[\Delta x \Delta x] = \min$, kao što oni kroz matematički aparat i djeluju niko od geodeta ne bi to prihvatio, jer bi to značilo da se prvo izravna mreža pod uslovom $[pvv] = \min$, pa onda uzme jedna proizvoljna mreža (približne koordinate su u odredjenim granicama proizvoljne) te traže nove koordinate i srednje greške pod uslovom $[\Delta x \Delta x] = \min$.

Ovako dobijene srednje greške koordinata (relativne greške) nemaju praktičnog smisla, jer se ne odnose ni na kakvo dato (polazno) stanje, pa se ne mogu ni u kakvu svrhu koristiti.

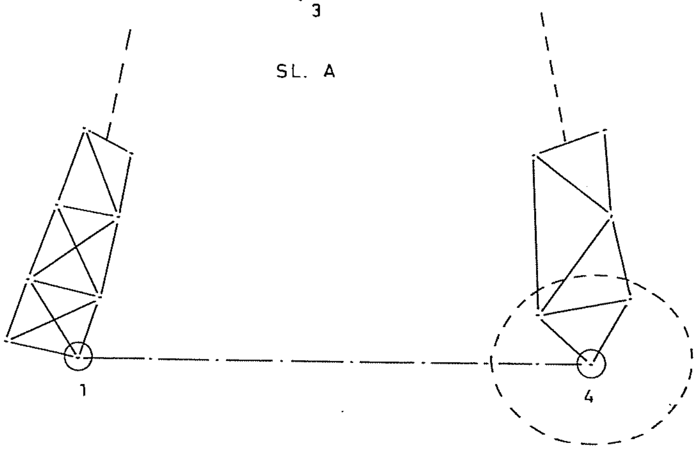
Uzmimo na primjer inženjersku geodeziju za koju su uglavnom ovakve mreže namijenjene, pa posmatrajmo, recimo, dvije mreže za probijanje istog tunela od tačke "1" do "4" slika "A" i "B".

Neka su usvojene koordinate tačke 1 i direkcioni ugao ν_1^5, sl.A. Kada izvršimo izravnanje mreže na standardan način, dobićemo srednje greške tačke 4 (M_{y4}, M_{x4}) u odnosu na tačku 1 ($M_{y1} = M_{x1} = 0$) i dati direkcioni ugao ν_1^5 ($M_\nu = 0$). Sa ovim greškama ulazimo dalje u proračun za davanje pravca proboja tunela od 4 prema 1.

Srednje greške sračunate na nov način (relativne greš-



SL. A



SL. B

- relativne srednje greške

- standardne srednje greške

ke) tačaka 1 i 4 u mreži A i B, za istu preciznost mjerenja, bile bi približno iste, recimo oko 2 cm, dok bi greške sračunate na standardan (uobičajen) način za tačku 4 u mreži B bile neuporedivo veće nego u mreži A. Recimo u mreži A (pošto je ova mreža jednostavna), s obzirom na relativne greške od oko 2 cm, iznosiće: $M_{y1}=M_{x1}=0$, a M_{y4} i M_{x4} oko 3 do 4 cm, dok greške u mreži B, s obzirom na dužinu mreže (na slici crtkano naznačeno) iznosiće: $M_{y1}=M_{x1}=0$, a M_{y4} i M_{x4} mogu biti i 2 metra (zavisno od dužine mreže).

Kada krenemo probijanjem tunela od tačke 4 prema 1 moraćemo, za slučaj mreže B, počinjati sa datom srednjom greškom od 2 santimetra ili od 2 metra, zavisno od toga da li smo računali relativne ili standardne srednje greške. Naravno da je u ovom slučaju stvarna srednja greška 2 metra i to je jedino ispravno.

Relativne greške od oko 2 cm su nastale zato što ove greške ne uzimaju u obzir položaj tačaka u mreži u odnosu na neko dato stanje (date spoljne elemente). Radi toga bi napravili neoprostivu grešku u proračunu tačnosti proboja tunela.

Nema smisla ni primjena relativnih grešaka kod analize tačnosti mjerenih veličina i geometrijskog oblika mreža na osnovu apriori usvojenih vrijednosti položajnih grešaka koordinata, jer apriori usvojene srednje greške koordinata moraju sledovati iz apriori usvojenog datog stanja, a to znači da moraju biti proračunate polazeći od datih ili pretpostavljenih spoljnih elemenata za tu mrežu. Kad god bi promijenili date elemente (recimo broj datih tačaka promijenili bi i apriorne greške, a s tim i greške koordinata dobijene nakon mjerenja (izravnanja).

Dakle, greške koordinata kao greške spoljnih elemenata imaju jedino smisla ako se odnose na neko dato ili pretpostavljeno stanje. Ovo zato što one u sebi sadrže, prije svega polazno stanje, pa tek onda tačnost mjerenja i konfiguraciju mreže. Šta nama vrijede nekakve greške koje su dobijene u odnosu na računski date koordinate (približne koordinate) koje na terenu nisu nigdje materijalizovane.

Jasno je da takve greške ne mogu imati praktičnog smisla.

ZAKLJUČAK

U posljednje vrijeme, polazeći od Mittermayera pa dalje, napisan je veliki broj radova u kojima se razmatraju srednje greške koordinata u slobodnim geodetskim mrežama, a koje do tada nisu razmatrane niti računate.

Da bi ove greške dobile i teorijsku podlogu, pripisuje im se i nova teorija grešaka pod nazivom "Unutrašnja teorija grešaka". Jasno je da, zasnovana na principu najmanjih kvadrata, postoji samo jedna teorija grešaka, čiji je osnov postavio Gauss i da do danas na ovom principu nije izgradjena neka druga teorija grešaka.

Relativne greške su bile prihvaćene od jednog broja geodeta zato što su po svojoj veličini, uglavnom manje od odgovarajućih, dobijenih na uobičajeni način.

Medjutim, one ne mogu u geodetskoj praksi imati primjenu, jer polazne postavke na kojima počivaju nisu, u smislu geodetskih potreba, ispravne.

Pometnju je vjerovatno donijelo zajedničko nametanje uslova $[pvv] = min.$ i $[\Delta x \Delta x] = min.$, pa je to izgledalo kao nešto novo, pogotovo kada je iz toga proizišla kao posljedica da je trag $Q_x = min$, odnosno da je suma kvadrata grešaka M_y i M_x minimalna.

LITERATURA

[1] Stevanović, J.: Dileme u vezi sa izravnanjem i ocjenom tačnosti slobodnih geodetskih mreža. Geodetski list, 1987, 1-3, 35-60.

[2] Pašalić, S.: Jedna metoda izravnanja slobodne triangulacione mreže. Geodetski list, 1984, 4-6, 69-76.

REZIME

Autor iznosi svoje mišljenje u pogledu praktičnog smisla srednjih grešaka koordinata geodetskih mreža, dobijenih na bazi izravnanja slobodnih mreža pod uslovima:

$$[pvv] = min. \quad i \quad [\Delta x \Delta x] = min.$$