Prof.dr Nihad Kapetanović
Gradjevinski fakultet Sarajevo

SREDNJA GREŠKA KOORDINATA PROIZVOLJNE TAČKE U VLAKU

0. UVOD

U nivelmanskoj*) odnosno poligonskoj mreži izravnanjem se odredjuju nadmorske visine H, odnosno koordinate y i x čvornih tačaka. Srednje greške M_H nadmorskih visina H, odnosno srednje greške M_y i M_x koordinata y i x čvornih tačaka odredjuju se u procesu izravnanja.

Nakon toga vrši se računanje nadmorskih visina odnosno koordinata tačaka u vlacima umetnutim izmedju čvornih tačaka. Te visine odnosno koordinate odredjuju se izravnanjem koristeći pri tome odgovarajuće težine u niv.obr.br.3, niv.obr.br.3T, zapisniku K odnosno u trig.obr.br.19.

U tim obrascima nije predvidjena ocjena tačnosti, što znači da se ne računaju srednje greške nadmorskih visina odnosno koordinata pojedinih tačaka vlaka.

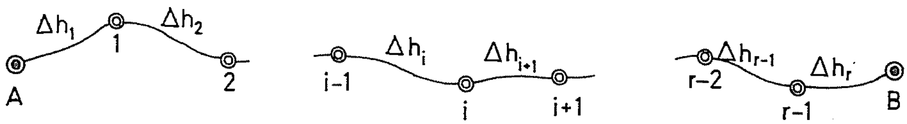
Tako odredjene nadmorske visine odnosno koordinate ne zadovoljavaju za sve zadatke, naročito za potrebe inženjerske geodezije.

Stoga se u nastavku razmatra ovo pitanje.

1. SREDNJA GREŠKA NADMORSKE VISINE PROIZVOLJNE TAČKE (REPERA) U NIVELMANSKOM VLAKU

Neka se izravnava nivelmanski vlak umetnut izmedju čvornih tačaka (repera) A i B (sl.1).

*) Pod nivelmanskom mrežom podrazumijevamo sve mreže kojima se odredjuju nadmorske visine, tj. mreže geometrijskog, trigonometrijskog i tahimetrijskog nivelmana.



Sl.1.

Tačke A i B su date, pa su i njihove srednje greške M_{H_A} i M_{H_B} date. U vlaku su izmjerene visinske razlike Δh_i $(i=1,2,\ldots,r)$, kojima su odredjene popravke v_{h_i} i tako dobijene nadmorske visine tačaka $1,2,\ldots,i,\ldots r-1$.

Srednja greška visinske razlike Δh_i odredjuje se na osnovu broja n_i nivelmanskih stanica u toj visinskoj razlici, tj.

$$m_{\Delta h_i} = m_o\sqrt{n_i} \tag{1a}$$

pri čemu m_o predstavlja srednju grešku jedinice težine dobijenu izravnanjem čvornih repera. Ako su sve vizure približno iste dužine, srednja greška visinske razlike može se odrediti i po formuli

$$m_{\Delta h_i} = m_o\sqrt{s_i} \tag{1b}$$

gdje je s_i dužina izmedju tačaka (repera) <u>i-1</u> i <u>i</u> (vidi sl. 1.).

Pošto se visina i-te tačke odredjuje kao opšta aritmetička sredina po formuli

$$H_i = \frac{P_1(H_A+\Delta h_1+\Delta h_2+\ldots\Delta h_i) + P_2(H_B-\Delta h_r-\Delta h_{r-1}-\ldots\Delta h_{i+1})}{P_1 + P_2} \quad (2)$$

to je, shodno zakonu o prirastu grešaka, njezina srednja greška

$$M_{H_i} = \sqrt{\frac{P_1^2(M_{H_A}^2+m_{\Delta h_1}^2+m_{\Delta h_2}^2+\ldots m_{\Delta h_i}^2)+P_2^2(M_{H_B}^2+m_{\Delta h_r}^2+m_{\Delta h_{r-1}}^2+\ldots m_{\Delta h_{i+1}}^2)}{(P_1+P_2)^2}} \quad (3)$$

pri čemu se težine P_1 i P_2 odredjuju po formulama

$$P_1 = \frac{K}{M_{H_A}^2+m_{\Delta h_1}^2+m_{\Delta h_2}^2+\ldots m_{\Delta h_i}^2}$$

$$P_2 = \frac{K}{M_{H_B}^2+m_{\Delta h_r}^2+m_{\Delta h_{r-1}}^2+\ldots m_{\Delta h_{i+1}}^2} \quad (4)$$

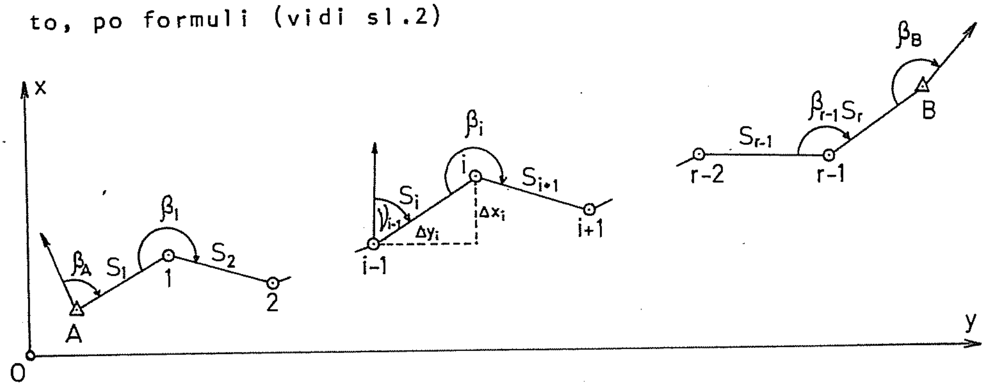
U formulama (4) K je proizvoljna konstanta.

2. SREDNJA GREŠKA KOORDINATA PROIZVOLJNE TAČKE U POLIGONSKOM VLAKU

Neka se izravnava poligonski vlak umetnut izmedju datih tačaka A i B (sl.2). Tačke A i B su ili trigonometrijske ili poligonske čvorne tačke, u oba slučaja srednje greške M_{y_A}, M_{x_A} i M_{y_B}, M_{x_B} koordinata y_A, x_A i y_B, x_B koordinata tačaka A i B odredjene su u procesu izravnanja.

Poligonski vlak se obično izravnava približnom metodom, što znači da se najprije izravnaju mjereni uglovi, a zatim koordinatne razlike i to posebno po y i x-osi.

Koordinatne razlike Δy_i računaju se, kao što je poznato, po formuli (vidi sl.2)



Sl.2.

$$\Delta y_i = s_i \sin \nu_{i-1} \tag{5a}$$

pri čemu se i-ti direkcioni ugao računa na osnovu početnog direkcionog ugla i mjerenih veznih i prelomnih uglova, tj.

$$\nu_i = \nu_p + \beta_A + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_i \pm i \cdot 180^{\circ} \tag{6}$$

Srednja greška i-te koordinatne razlike po y-osi, na osnovu jedn.(5a) je

$$m_{\Delta y_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta y_i}{\partial s_i}\right)^2 m_{s_i}^2 + \left(\frac{\partial \Delta y_i}{\partial \nu_{i-1}}\right)^2 m_{\nu_{i-1}}^2} \tag{7a}$$

pa ako uvažimo relacije

$$\frac{\partial \Delta y_i}{\partial s_i} = \sin \nu_{i-1}; \quad \frac{\partial \Delta y_i}{\partial \nu_{i-1}} = s_i \cos \nu_{i-1} \tag{8a}$$

dobijamo

$$m_{\Delta y_i} = \sqrt{\sin^2 \nu_{i-1}\, m_{s_i}^2 + s_i^2 \cos^2 \nu_{i-1}\, m^2_{i-1}} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 \nu_{i-1}\, m^2_{s_i} + s^2_i \cos^2 \nu_{i-1} \left(\frac{m''_{\nu_{i-1}}}{\rho''}\right)^2} \qquad (9a)$$

Srednja greška strane s_i u slučaju da su strane poligonskog vlaka mjerene pantljikom ili optičkim daljinomjerom može se sračunati po formuli

$$m_{s_i} = m_o \sqrt{s_i} \qquad (i=1,2,\ldots,r) \qquad (10\cdot \text{pant.})$$

pri čemu je m_o srednja greška jedinice težine mjerenih strana.

Ako su strane mjerene elektrooptičkim daljinomjerom može se smatrati da su sve izmjerene sa istom tačnošću, pa je u tom slučaju

$$m_{s_1} = m_{s_2} = \ldots = m_{s_i} = \ldots = m_{s_r} = m_s \qquad (10\cdot \text{el.dalj.})$$

Srednja greška direkcionog ugla ν_{i-1} je prema jedn.(6)

$$m_{\nu_{i-1}} = \sqrt{M^2_{\nu_p} + m^2_{\beta_A} + \sum_{j=1}^{i-1} m^2_{\beta_j}} \qquad (11)$$

U posljednjoj formuli M_{ν_p} predstavlja srednju trešku početnog direkcionog ugla koja se može sračunati na osnovu srednjih grešaka datih koordinata kao funkcija izravnatih veličina, dok m_{β_j} predstavlja srednju grešku jednog mjerenog veznog ili prelomnog ugla.

Ako usvojimo da su svi prelomni i vezni uglovi mjereni istom tačnošću, tj.

$$m_{\beta_A} = m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \ldots = m_{\beta_i} = \ldots = m_{\beta_r} = m_\beta \qquad (12)$$

proizlazi prema (11)

$$m_{\nu_{i-1}} = \sqrt{M^2_{\nu_p} + i \cdot m^2_{\beta}} \tag{13}$$

Ako jedn. (13) uvrstimo u jedn. (9a) imaćemo

$$m_{\Delta y_i} = \sqrt{\sin^2 \nu_{i-1}\, m^2_{s_i} + \frac{s_i^2 \cos^2 \nu_i \,(M''^2_{\nu_p} + i m''^2_{\beta})}{\rho''^2}} \tag{14a}$$

Pošto se y-koordinata tačke i odredjuje kao opšta aritmetička sredina po formuli

$$y_i = \frac{P_{1_y}(y_A + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots \Delta y_i) + P_{2_y}(y_B - \Delta y_r - \Delta y_{r-1} - \ldots \Delta y_{i+1})}{P_{1_y} + P_{2_y}} \tag{15a}$$

to je njezina srednja greška

$$M_{y_i} = \sqrt{\frac{P^2_{1_y}(M^2_{y_A} + m^2_{\Delta y_1} + m^2_{\Delta y_2} + \ldots m^2_{\Delta y_i}) + P^2_{2_y}(M^2_{y_B} + m^2_{\Delta y_r} + m^2_{\Delta y_{r-1}} + \ldots + m^2_{\Delta y_{i+1}})}{(P_{1_y} + P_{2_y})^2}} \tag{16a}$$

pri čemu se težine P_{1_y} i P_{2_y} odredjuju po formulama

$$P_{1_y} = \frac{K_y}{M^2_{y_A} + m^2_{\Delta y_1} + m^2_{\Delta y_2} + \ldots m^2_{\Delta y_i}}$$

(17a)

$$P_{2_y} = \frac{K_y}{M^2_{y_B} + m^2_{\Delta y_r} + m^2_{\Delta y_{r-1}} + \ldots m^2_{\Delta y_{i+1}}}$$

U jedn. (17a) K_y je proizvoljna konstanta.

Analogno se dobija srednja greška x-koordinate i-te tač-tačke u poligonskom vlaku. Koordinatne razlike Δx_i računaju se, naime po formuli

$$\Delta x_i = s_i \cos \nu_{i-1} \tag{5b}$$

pa je srednja greška te koordinatne razlike

$$m_{\Delta x_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial s_i}\right)^2 m_{s_i}^2 + \left(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial \nu_i}\right)^2 m_{\nu_{i-1}}^2} \tag{7b}$$

odnosno,uvažavajući relacije

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial s_i} = \cos \nu_{i-1}; \qquad \frac{\partial \Delta x_i}{\partial \nu_{i-1}} = -s_i \sin \nu_{i-1} \tag{8b}$$

dobijamo

$$m_{\Delta x_i} = \sqrt{\cos^2 \nu_{i-1} \, m_{s_i}^2 + s_i^2 \sin^2 \nu_{i-1} \left(\frac{m''_{\nu_{i-1}}}{\rho''}\right)^2} \tag{9b}$$

Ako jedn. (13) uvrstimo u jedn. (9b) imaćemo

$$m_{\Delta x_i} = \sqrt{\cos^2 \nu_{i-1} \, m_{s_i}^2 + \frac{s_i^2 \cos^2 \nu_{i-1} (M''^2_{\nu_p} + i\, m''^2_{\beta})}{\rho''^2}} \tag{14b}$$

Pošto se x-koordinata tačke i odredjuje kao opšta aritmetička sredina po formuli

$$x_i = \frac{P_{1_x} (x_A + \Delta x_1 + \Delta x_2 + ..\Delta x_i) + P_{2_x} (x_B - \Delta x_r - \Delta x_{r-1} - ..\Delta x_{i+1})}{P_{1_x} + P_{2_x}} \tag{15b}$$

to je njezina srednja greška

$$M_{x_i} = \sqrt{\frac{P_{1_x}^2 (M_{x_A}^2 + m_{\Delta x_1}^2 + m_{\Delta x_2}^2 + ..m_{\Delta x_1}^2) + P_{2_x}^2 (M_{x_B}^2 + m_{\Delta x_r}^2 + m_{\Delta x_{r-1}}^2 \qquad + m_{\Delta x_{i+1}}^2)}{(P_{1_x} + P_{2_x})^2}} \tag{16b}$$

pri čemu se težine P_{1_x} i P_{2_x} odredjuju po formulama

$$P_{1_x} = \frac{K_x}{M^2_{x_A} + m^2_{\Delta x_1} + m^2_{\Delta x_2} + \ldots m^2_{\Delta x_i}}$$

$$P_{2_x} = \frac{K_x}{M^2_{x_B} + m^2_{\Delta x_r} + m^2_{\Delta x_{r-1}} + \ldots m^2_{\Delta x_{i+1}}} \qquad (17b)$$

U formulama (17b) K_x je proizvoljna konstanta.

Srednja položajna greška M_i tačke i je, kao što je poznato

$$M_i = \sqrt{M^2_{y_i} + M^2_{x_i}} \qquad (18)$$

Razumljivo je da se na osnovu srednjih grešaka koordinata M_{y_i} i M_{x_i} može sračunati i odgovarajuća elipsa grešaka.