Mr Mladen Lero
SOUR ŽTO
RO Institut za saobraćaj - Sarajevo

RAČUNANJE ELEMENATA ZA PROJEKTOVANJE I ISKOLČAVANJE KRIVINA OBLIKA KLOTOIDE I KUBNE PARABOLE

1. UVOD

Danas se u svijetu sve više upotrebljavaju elektronski računari pri projektovanju saobraćajnica. Takvi projekti sadrže u elaboratu i elemente iskolčenja dobivene analitičkim putem pomoću elektronskog računara. Na temelju geodetskih koordinata svake tačke trase, koje sadrži projekat, dobiveni su svi elementi iskolčenja s obzirom na bilo koju povoljnu stranu geodetske mreže za ortogonalno i polarno iskolčenje trase. Ovako dobiveni podaci za polarno iskolčenje veoma su podesni za upotrebu elektroničkih daljinomjera, jer je moguće sa jedne povoljno odabrane tačke iskolčiti veći dio trase, a posebno dolazi do izražaja pri iskolčenju raskršća i petlji, gdje je na jednom mjestu koncentrisano više krivina koje su u medjusobnoj ovisnosti. Ovaj način rada osobito dolazi do izražaja pri samom gradjenju i vršenju geodetskog nadzora, jer se iskolčene tačke trase izvodjenjem radova unište i moraju se ponovo uspostavljati, a to nije teško, jer su tačke geodetske osnove zaštićene od uništenja i osigurane na gradilištu.

Medjutim, projekti izradjeni klasičnim metodama nisu ovako kvalitetni, pa često ne sadrže geodetske koordinate, ni potrebne elemente za iskolčavanje. Iz ovoga proizilaze veliki problemi pri realizaciji projekata. Zbog kvalitetnog izvodjenja i geodetskog nadzora neposredni izvršioci na terenu su primorani da sami računaju potrebne elemente za iskolčavanje.

Osovina trase saobraćajnice sastavljena je iz pravaca, kružnih lukova i prelaznih krivina za koje se koristi klotoida ili njene razne kombinacije, a kod željeznice kubna parabola [5] (Pravilnik 314 o održavanju gornjeg stroja pruga JŽ).

Računanje elemenata za iskolčenje pravaca i krivine oblika kružnice su relativno jednostavni.

Ako je potrebno izračunati elemente osi prelaznice, (klotoide ili kubne parabole), tada je računanje nešto složenije, pa se kod klasičnog računanja koriste tablice [3], [4], dok se kod elektronskog računara moraju naći odgovarajuće formule.

Tablice nam daju elemente za glavne parametre prelaznice i pripadanog radijusa zaokruženih na 5 i 10 metara (za velike radiuse i 100 m) kao i elemente detaljnih tačaka na prelaznici. Medjutim, kod izrade glavnog projekta rekonstrukcije postojećih saobraćajnica (glavna opravka pruge - remont, rekonstrukcija puteva) nastojimo zadržati postojeće objekte (propuste, mostove, tunele, smještanje trase izmedju nekih objekata blizu trase - razni stubovi, dijelovi zgrada i sl.) te je potrebno iskolčiti tačke prelaznice koje ne pripadaju okruglim vrijednostima, a često smo primorani da upotrijebimo pripadni radijus koji nije zaokružen na vrijednost datu u tablicama, u nekim prilikama ni na jedan metar. Kod rekonstrukcije saobraćajnica nastoji se zadržati ranija trasa, a potrebno je prilagoditi saobraćajnicu većim brzinama.

Pri izgradnji saobraćajnica potrebno je definisati tačno mjesto u osovini trase za objekte koji se grade prije nego ostali dio trase (propuste, stubove, mostove, portale tunela, kampade i sl.). Elementi za iskolčenje tih tačaka često se ne nalaze u projektnoj dokumentaciji, nego su definisani samo po stacionaži ne dajući potrebne elemente iskolčenja ukoliko su u prelaznoj krivini.

U svim ovim prilikama su nam tablice praktično neupotrebljive za računanje elemenata za iskolčenje, te smo primorani da sva računanja obavljamo sami prema odgovarajućim formulama. Zbog toga je ekipama koje rade na terenu potrebno obezbijediti mikro računare za ova računanja. Pitanje računanja pojedinog tipa zadatka treba regulisati programom,tako da računar izvodi cijeli postupak računanja od početka do kraja zadatka. Program mora predvidjeti sve varijante zadatka, kako bi u svim slučajevima bio upotrebljiv. Zato je izrada programa, kojim se rješava neka vrsta zadatka, obiman posao, ali ujedno trajna investicija, jer će se program moći koristiti uvijek pri rješavanju takvog tipa zadatka.

U ovom radu ćemo dati pripadne formule i odgovarajuće dijagrame toka programa za rješavanje pojedinih zadataka pri računanju elemenata za projektovanje i iskolčavanje prelaznih krivina oblika klotoide i kubne parabole.

2. PRELAZNE KRIVINE

Jedan od najvažnijih zahtjeva brzog saobraćaja, kako na željeznicama isto tako i na putevima, je pravilno oblikovanje krivina, a pri ovom oblikovanju je od velikog značaja umetanje prelaznih krivina ili prelaznica [4] .

Da bi sigurnost vožnje cestama i prugama bila veća, umeće se izmedju pravca i kružne krivine prelazna krivina. Prelazna krivina ima promjenljiv radijus od $R=\infty$(pravac) do zadanog radijusa R. Izmedju dva kružna luka istog smisla (skretanja) a različitog radijusa umeće se prelazna krivina, kojom se obavlja prelaz od jednog radijusa na drugi, te se izmedju dva kružna luka suprotnog smisla umeću dvije protusmjerne prelazne krivine sa ili bez medjupravaca. U navedenim slučajevima može biti prelaznica ponekad ispuštena, kao na primjer da pravac direktno prelazi u kružni luk (korištenje velikih radijusa), ili jedan kružni luk u drugi.

2.1. Klotoida

Klotoida je kriva koja se upotrebljava kao prelazna krivina na cestama.

To je kriva u koje je umnožak radijusa i dužine luka za bilo koju tačku krive konstantan, tj.

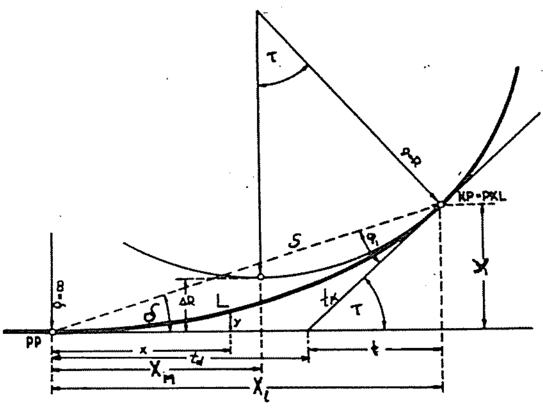
$$R \cdot L = C \qquad (1)$$

gdje je:

L - dužina luka od ishodišta

R - radijus zakrivljenosti

C - konstanta



Sl.1. Elementi klotcide

2.1.1. Računanje elemenata klotoide

Pravougle koordinate proizvoljne tačke na krivoj klotoide X_i i Y_i za udaljenost od početka po luku L_x možemo sračunati prema [4] po formulama:

$$X_i = L_x\left[1-0{,}1\left(\frac{L_x^2}{2C}\right) + \frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^4 - \frac{1}{13\cdot 6!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{17\cdot 8!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^8 - \frac{1}{21\cdot 10!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^{10} + \ldots\right] \quad (2)$$

$$Y_i = \frac{L_x^3}{6C}\left[1-\frac{3}{7\cdot 3!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^2 + \frac{3}{11\cdot 5!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^4 - \frac{3}{15\cdot 7!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{19\cdot 9!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^8 - \frac{3}{23\cdot 11!}\left(\frac{L_x^2}{2C}\right)^{10} + \ldots\right]$$

Radi manjeg memorijskog prostora formule (2) ćemo prilagoditi za računanje na računaru:

Uvedimo zamjenu $L_x = P$ i $\frac{L_x^2}{2C} = B$, $(C = R\cdot L)$

$$X_i = P\cdot\left(1-0{,}1\cdot B^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{xn}\right) \quad (3)$$

$$Q_{xn} = G_n \cdot \frac{1}{K_n\cdot J_n!} B^{H_n}$$

gdje je za n=1: $G_1 = 1$

a za $n > 1$: $G_n = (-1)\, G_{n-1}$

$K_1 = 9 \qquad\qquad K_n = K_{n-1} + 4$

$J_1 = 4 \qquad\qquad J_n = J_{n-1} + 2$

$H_1 = 4 \qquad\qquad H_n = H_{n-1} + 2$

$$Y_i = \frac{p^3}{6RL}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{yn}\right) \tag{4}$$

$$Q_{yn} = G_n \frac{3}{K_n \cdot J_n!} B^{H_n}$$

gdje je za n=1: a za $n > 1$:

$G_1 = -1 \qquad\qquad G_n = (-1) \cdot G_{n-1}$

$K_1 = 7 \qquad\qquad K_n = K_{n-1} + 4$

$J_1 = 3 \qquad\qquad J_n = J_{n-1} + 2$

$H_1 = 2 \qquad\qquad H_n = H_{n-1} + 2$

Program za računanje potrebno je sastaviti tako da se izračuna toliko članova dok se ne postigne da je $(X_i - X_{i-1}) < \varepsilon$ i $(Y_i - Y_{i-1}) < \varepsilon$. Ako se traži tačnost na milimetar, potrebno je uzeti $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Sa poznatim veličinama X_1 i Y_1 u krajnjoj tački prelaznice dobivenih po formulama (3) i (4) (stavljajući $L_x = L$) možemo sračunati sve elemente klotoide [1] :

$$\tau = \rho \cdot \frac{L}{2R}$$

$$S = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$$

$$\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{Y_1}{X_1}$$

$$t_d = X_1 - Y_1 \operatorname{ctg} \tau \qquad X_M = X_1 - R \cdot \sin \tau$$

$$t_K = \frac{Y_1}{\sin \tau} \qquad Y_M = Y_1 + R \cdot \cos \tau \qquad (5)$$

$$\Delta R = Y_1 - R(1 - \cos \tau)$$

Oznake u formulama (5) prema sl.1. su:

R = poluprečnik kružnog luka

L = dužina prelaznice

Y_1 = ordinata krajnje tačke prelaznice

X_1 = apscisa krajnje tačke prelaznice

τ = ugao koji zaklapa tangenta u krajnjoj tački prelaznice sa tangentom u njenoj početnoj tački

S = dužina tetive prelaznice

δ = ugao koji zaklapa tetiva prelaznice sa glavnom tangentom u početnoj tački prelaznice

t_d = dužina veće tangente prelaznice (u početnoj tački)

t_K = dužina kraće tangente (u krajnjoj tački prelaznice)

X_M = apscisa središta kružnog luka

Y_M = ordinata središta kružnog luka

ΔR = odstojanje, iznos za koji moramo da odmaknemo kružni luk ka unutrašnjoj strani krivine, da bi mogli izmedju pravca i kružnog luka umetnuti prelaznicu.

2.1.2. Računanje elemenata krivine sa prelaznicom

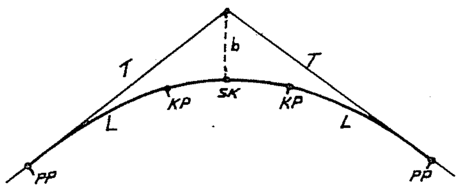
Za simetričnu krivinu (Sl.2) računamo elemente krivine po formulama:

tangentu krivine: $T = (R + \Delta R) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + X_M$

udaljenost sredine

krivine od tjemena: $b=(R+\Delta R)(\sec\frac{\alpha}{2}-1)+\Delta R$ (6)

dužinu cijele krivine: $DK=\frac{R\pi(\alpha-2\tau)}{180}+2L$



Sl.2. Simetrična krivina s prelaznicom

Kod nesimetrične krivine ($L_1 \neq L_2$) odgovarajuće tangente računamo po formulama (Sl.3.):

ako je $L_1>L_2$

$$T_1 = (R+\Delta R_2)\,tg\frac{\alpha}{2} + X_{M1} - \frac{\Delta R_1-\Delta R_2}{tg\,\alpha} \qquad (7)$$

$$T_2 = (R+\Delta R_2)\,tg\frac{\alpha}{2} + X_{M2} + \frac{\Delta R_1-\Delta R_2}{\sin\alpha} .$$

kada je $L_2>L_1$

$$T_1 = (R+\Delta R_1)\,tg\frac{\alpha}{2} + X_{M1} + \frac{\Delta R_2-\Delta R_1}{\sin\alpha} \qquad (8)$$

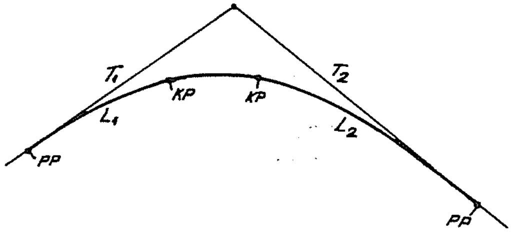
$$T_2 = (R+\Delta R_1)\,tg\frac{\alpha}{2} + X_{M2} - \frac{\Delta R_2-\Delta R_1}{tg\,\alpha}$$

Dužinu cijele nesimetrične krivine računamo po formuli:

$$DK = \frac{R\pi\left[\alpha-(\tau_1+\tau_2)\right]}{180} + L_1 + L_2 \qquad (9)$$

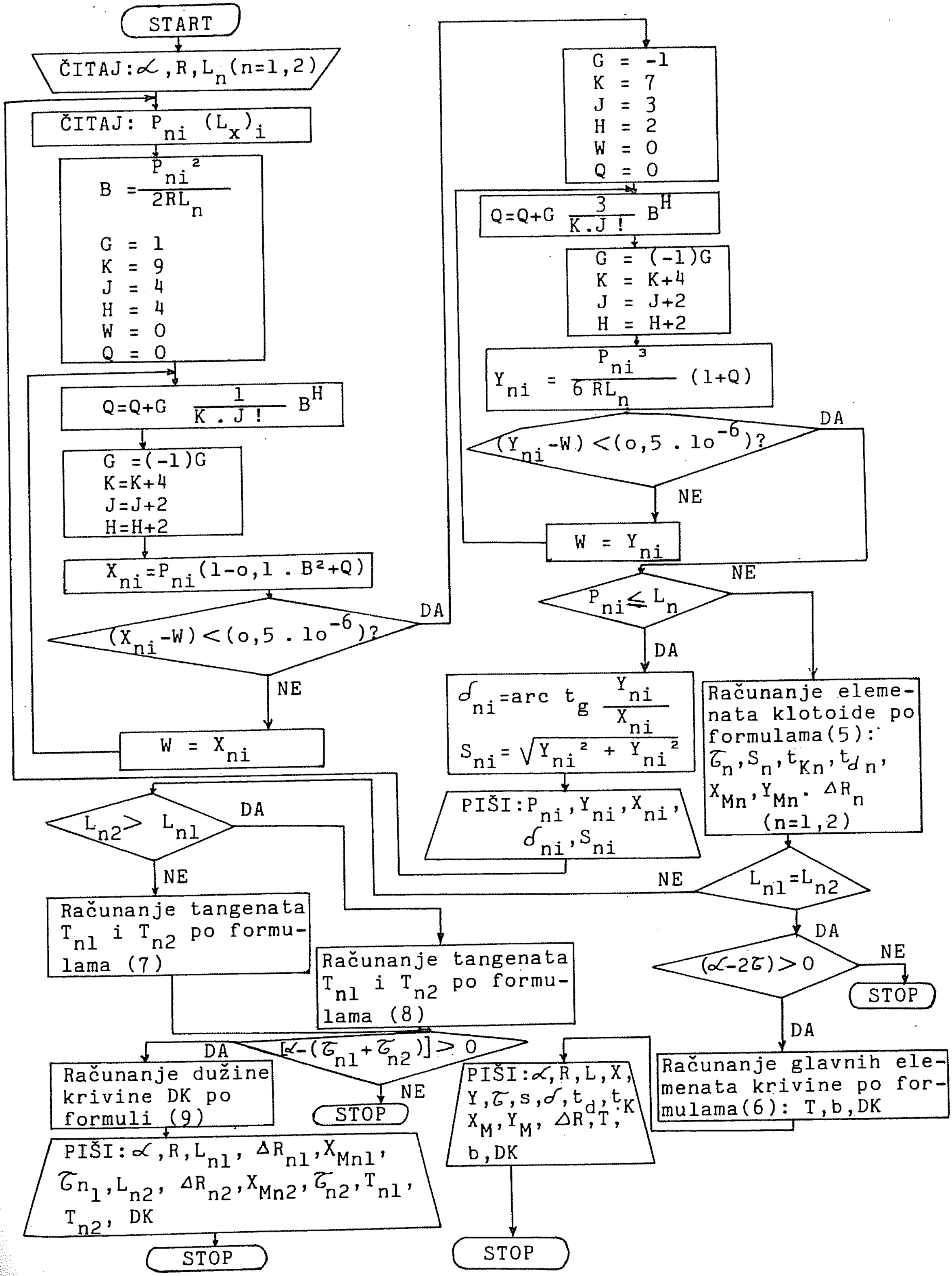
Pošto imamo pripadne formule za računanje elemenata same prelaznice kao i glavnih elemenata cijele krivine možemo pristupiti izradi programa za računanje na računaru. Čest je slučaj da u praksi odabiramo razne kombinacije radijusa krivine i dužine prelaznice u okviru zadanog ugla α na tjemenu, pa ćemo u cilju omogućavanja povoljnog varijantisanja pri ubacivanju prelaznih krivina ovaj problem obraditi jednim programom, a što se kod većih računara uzima kao potprogram.

Pomoću dijagrama toka 1. možemo za računar koji posjedujemo napraviti program za računanje svih elemenata klotoide, kao i elemenata za detaljno iskolčavanje ortogonalnom i polarnom metodom.



Sl.3. Nesimetrična krivina

Dijagram toka 1. Računanje elemenata klotoide



2.2. Kubna parabola

Prema Pravilniku 314. o održavanju gornjeg stroja pruga JŽ [5] za oblik prelazne krivine koristi se:

a) prosta kubna parabola do dužine prelazne krivine $L = \sqrt[4]{0{,}64 \cdot R^3}$, a izračunava se po obrascu $y = \frac{x^3}{6RL}$;

b) popravljena kubna parabola za dužine veće od izračunatih u prednjoj tački a) i izračunava se po obrascu:

$$y = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2R}\right)^2}^{\,3}}{6Rl} x^3 \qquad (10)$$

gdje je:

y - ordinata

x - apscisa po tangenti od početka prelaznice

R - poluprečnik kružne krivine

L - dužina prelazne krivine

l = dužina projekcije prelazne krivine na tangentu

c) u izuzetnim slučajevima, uz saglasnost ZJŽ, prelazna krivina može biti u vidu kubne parabole četvrtog stepena.

U praksi se najčešće upotrebljava popravljena kubna parabola koja je definisana formulom (10).

Ordinatu krajnje tačke prelaznice prema formuli (10) dobićemo po formuli:

$$y_l = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{2R}\right)^2}^{\,3}}{6R} l^2, \qquad (11)$$

a dužinu projekcije prelaznice L na tangentu, kada je poznat radijus R i dužina prelaznice L po formuli:

$$l = L - \frac{L}{10} \left(\frac{L}{2R}\right)^2 \qquad (12)$$

Ugao koji zaklapa tangenta u krajnjoj tački prelaznica sa tangentom u njenoj početnoj tački računamo po formuli:

$$\tau = \text{arc tg} \frac{3y_l}{l} \qquad (13)$$

Apscisu X_M i ordinatu Y_M središta kružnog luka računamo po formulama:

$$X_M = l - R \sin\tau$$
$$Y_M = y_l + R \cos\tau \qquad (14)$$

Odstupanja $\Delta R(f)$ za koje moramo da odmaknemo kružni luk ka unutrašnjoj strani krivine, da bi mogli izmedju pravca i kružnog luka umetnuti prelaznicu računamo po formuli:

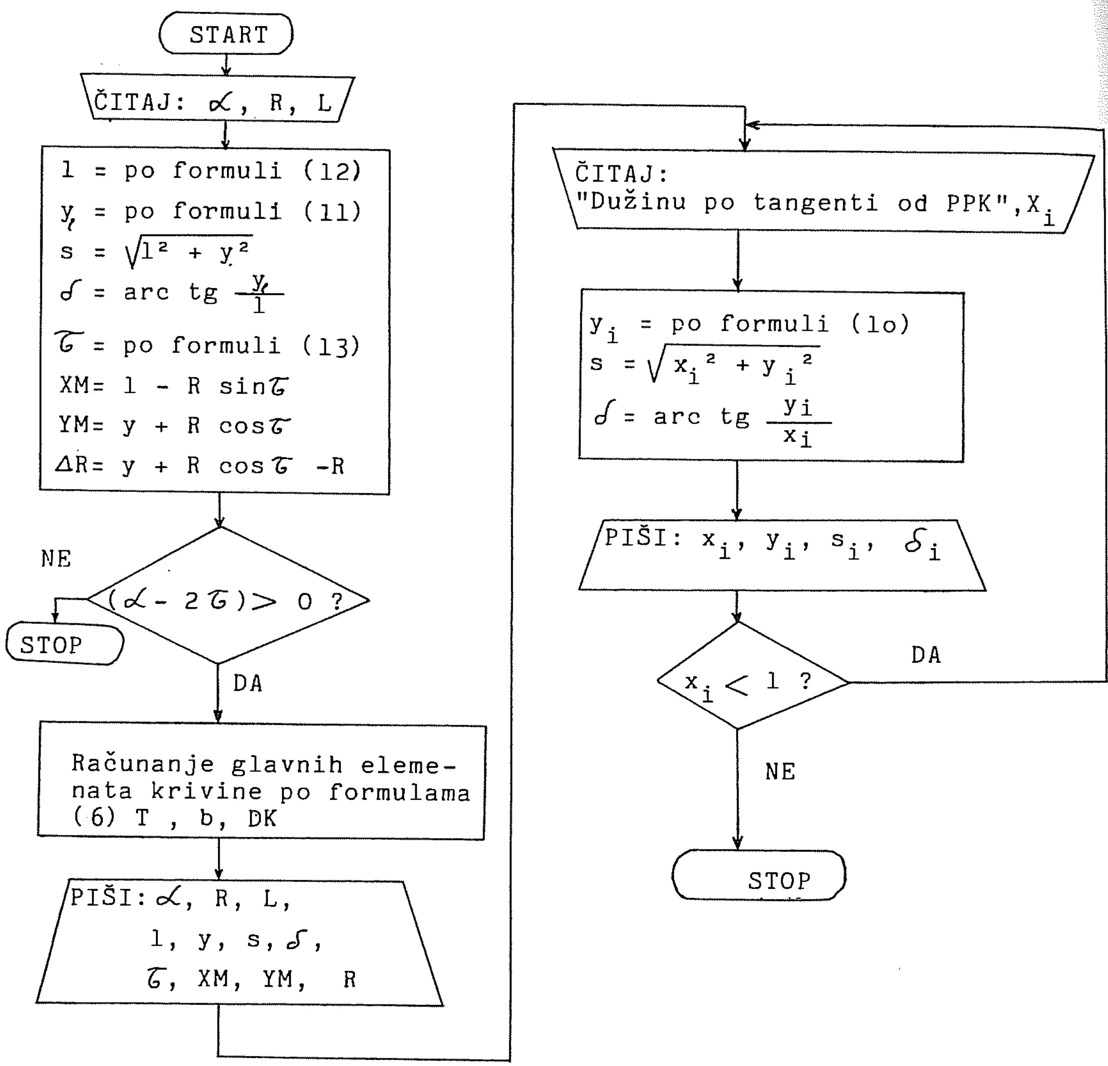
$$\Delta R = Y_l + R \cos\tau - R \qquad (15)$$

Ukoliko je ulazna i izlazna prelazna krivina jednake dužine, tada imamo simetričnu krivinu (Sl.2) i primjenjujemo iste formule (6) za računanje glavnih elemenata (tangentu, bisektrisu i dužinu krivine) kao kod klotoide uzimajući u račun odgovarajuće elemente kubne parabole sračunate po formulama (11), (12) i (13). U slučaju primjene kubne parabole kao nesimetrične krivine koriste se formule (7), (8) i (9) i isti program pri računanju tangenata i dužine krivine, s tim što u tim formulama primjenjujemo odgovarajuće parametre kubne parabole a ne klotoide.

Računanje potrebnih elemenata za detaljno iskolčavanje kubne parabole (ortogonalnom metodom) obavljamo po formuli (10), gdje računamo pojedinu ordinatu y_i za proizvoljnu vrijednost apscise x_i po tangenti od početka prelaznice, pa sve do vrijednosti l, krajnje tačke prelaznice.

Iz ovih vrijednosti, za potrebe iskolčavanja polarnom metodom sa stajališta u početnoj tački prelaznice, polarne koordinate s i δ računamo po formulama (5).

Dijagram toka 2. Računanje elemenata kubne parabole



Pomoću dijagrama toka 2. možemo napraviti program za računanje glavnih elemenata kubne parabole kao i elemenata za detaljno iskolčavanje ortogonalnom i polarnom metodom.

Kubna parabola je aproksimacija klotoide i ona za duže polaznice L i male vrijednosti radijusa R je deformisana.

Ova deformacija praktično se može zanemariti za male dužine prelazne krivine ili za velike radijuse zakrivljenosti.

I pored naše želje, pri korištenju popravljene kubne parabole (formula 10) kubna parabola u čestim slučajevima u praksi ne može u potpunosti aproksimirati klotoidu, što se vidi iz navedenih primjera, te bi bilo potrebno i na željezničkim prugama koristiti klotoidu kao prelaznu krivinu i u tom cilju izmijeniti propise na JŽ iz ove oblasti.

Primjeri računanja

Klotoida	Kubna parabola
$\alpha = 50^{\circ}35'56''$	$\alpha = 56^{\circ}35'56''$
R = 300 m	R = 300 m
L = 110 m	L = 110 m
l = 109,630	l = 109,630
XM= 54,938	XM= 53,080
YM= 301,679	YM= 301,636
YL= 6,706	YL= 7,014
ΔR= 1,678	ΔR= 1,636
$\tau = 10^{\circ}30'15''\cdot21$	$\tau = 10^{\circ}51'55''\cdot4$
T = 217,372	T = 215,490
b = 42,629	b = 42,581
DK= 406,351	DK= 402,569

Lx	x	y
30	29,999	0,136
60	59,982	1,091
90	89,865	3,678
100	99,771	5,042
110	109,63	6,706

δ	s
0°15'37",57	30,000
1°02'30",17	59,992
2°20'37",03	89,940
2°53'35",39	99,898
3°30'01",48	109,836

α = 39°48'58"
R = 300 m
L = 100 m
l = 99,723
XM = 49,954
YM = 301,388
YL = 5,545
ΔR = 1,388
τ = 9°32'57",47
T = 159,102
b = 20,543
DK= 308,477

x	y
30	0,144
60	1,150
90	3,881
100	5,323
109,63	7,014

δ	s
0°16'28",22	30,000
1°05'52",44	60,011
2°28'08",57	90,084
3°02'49",98	100,142
3°39'39",02	109,854

α = 39°48'58"
R = 300 m
L = 100 m
l = 99,722
XM = 48,542
YM = 301.357
YL = 5,755
ΔR = 1,357
τ = 9°49'21",67
T = 157,680
b = 20,511
DK= 305,616

Lx	x	y	x	y
30	29,999	0,150	30	0,157
50	49,991	0,694	50	0,725
60	59,978	1,200	60	1,253
70	69,953	1,905	70	1,991
80	79,909	2,842	80	2,971
90	89,836	4,045	90	4,231
95	94,785	4,756	95	4,976
96	95,774	4,907	96	5,135
97	96,762	5,062	97	5,297
98	97,749	5,219	98	5,462
99	98,736	5,380	99	5,631
100	99,723	5,545	99,722	5,755

δ	s	δ	s
0°17'11",32	30,00	0°17'57",33	30,00
0°47'44",75	49,996	0°49'52",41	50,005
1°08'45",17	59,990	1°11'48",75	60,013
1°33'34",67	69,979	1°37'43",96	70,028
2°02'13",15	79,960	2°07'37",59	80,055
2°34'40",48	89,927	2°41'28",96	90,099
2°52'19",91	94,904	2°59'53",5	95,130
2°55'58",65	95,899	3°03'41",5	96,137
2°59'39",67	96,894	3°07'31",86	97,145
3°03'22",98	97,888	3°11'24",57	98,152
3°07'08",58	98,883	3°15'19",65	99,160
3°10'56",46	99,877	3°18'10",83	99,88

ZAKLJUČAK

Na osnovu pripadnih formula potrebno je napisati odgovarajući program za rješavanje pojedinih zadataka na džepnom elektroničkom računaru koji posjedujemo, te isti testirati i time smo automatizirali rad na terenu i u birou. Na ovaj način stručnjaci koji rade projektovanje na terenu, kao i u birou moći će vrlo brzo odabrati najpovoljniju varijantu i dati sve potrebne elemente za iskolčavanje bilo kojom metodom bez grešaka u numeričkom računanju. Tako možemo da odaberemo najpovoljniju krivu za prelaznu krivinu i nije potrebno vršiti nikakve aproksimacije pomoću parabole zbog otežanog računanja. Time smo omogućili korištenje klotoide i na željezničkim prugama, koja zadovoljava sve uslove brzog željezničkog saobraćaja, jer je izvedena iz fizikalnih potreba saobraćaja.

LITERATURA

[1] Brukner, M.:
Primjena elektronskih računskih strojeva pri projektovanju nju cesta, Gradjevinar br.8. god. XVII-66.

[2] Janković, M.:
Inženjerska geodezija II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966.

[3] Sarrazin,O., Oberbeck, H.:
Priručnik za obilježavanje prelaznice oblika kubne parabole, JŽ, Subotica, 1955.

[4] Žnideršić, B.:
Priručnik za obilježavanje prelaznica oblika klotoide polarnim metodama, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968.

[5] Pravilnik 314 o održavanju gornjeg stroja pruga Jugoslovenskih željeznica, Beograd, 1970.

REZIME

U ovom radu date su formule za računanje elemenata iskolčenja prelaznih krivina oblika klotoide i kubne parabole. Zatim su dati odgovarajući dijagrami toka za izradu programa za računanje na džepnom elektroničkom računaru. Tako je omogućeno računanje svih podataka za iskolčavanje bez upotrebe priručnika za računanje [3] i [4].

U radu su istaknuti nedostaci kubne parabole koja se koristi kao prelazna krivina na željeznicama.