Mirza Ponjavić, stud.geodezije
Gradjevinski fakultet - Sarajevo

ODREDJIVANJE POLOŽAJA REGULACIONE OSOVINE KOD DJELOMIČNO IZGRADJENIH ULICA METODOM SREDNJE KVADRATNE APROKSIMACIJE

Kod geodetskih radova, pri izradi projekta regulacije naselja, javlja se potreba za neposrednim obilježavanjem regulacione osovine ulice, u slučaju kad projektovana ulica prati tok postojećih, djelimično izgradjenih ulica. Obično se dešava da objekti u ulici, manje ili više, odstupaju od srednje linije objekata, pa je time otežano tačno postavljanje regulacione osovine ulice, koja mora biti simetrična u odnosu na objekte sa jedne i druge strane. Pri odredjivanju tačnog položaja regulacione osovine moramo voditi računa i o kvalitetu, trajnosti i značaju objekata, na osnovu čega se formiraju koeficijenti uticaja objekata na položaj regulacione osovine, tj. "težine". Za definitivnu regulacionu osovinu usvojićemo pravu, kod koje je suma kvadrata odstupanja tačaka regulacione osovine od pojedinih objekata jednaka minimumu.

Pretpostavimo za sada da su težine $p_i=1$. Potrebno je postaviti pravac izmedju tačaka 1,2,3,...,n, uz uslov

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i)-y_i)^2=\min \qquad (1)$$

(vidi sliku 1). Pošto je jednačina pravca

$$f(x)=ax+b \qquad (2)$$

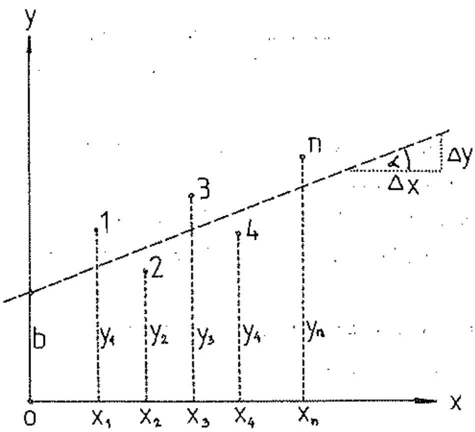
pri čemu je

$$a=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3)$$

to prema (1) imamo:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2=\min \qquad (4)$$

Da bi (4) vrijedilo mora biti prvi izvod S-a po "a" i "b" jednak nuli, tj.:



slika 1

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)x_i=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)=0 \qquad (5)$$

ili

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i-y_ix_i)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0 \qquad (6)$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n}ax_i^2+\sum_{i=1}^{n}bx_i=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}ax_i+\sum_{i=1}^{n}b=\sum_{i=1}^{n}y_i \qquad (7)$$

Jednačine (7) možemo pisati i u obliku:

$$a[xx]+b[x]=[xy]$$

$$a[x]+nb=[y] \qquad (7A)$$

Odavde je

$$b = \frac{[xy][x]-[y][xx]}{[x][x]-n[xx]} \qquad a = \frac{[y]-nb}{[x]} \qquad (8)$$

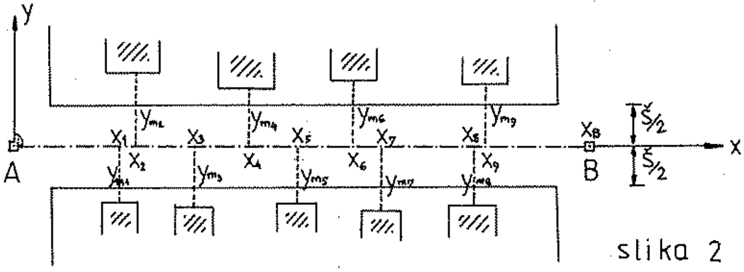
Ako uvedemo i težine p_i može se pisati:

$$b = \frac{[pxy][px]-[py][pxx]}{[px][px]-[p][pxx]} \qquad a = \frac{[py]-b[p]}{[px]} \qquad (8A)$$

Ovim smo odredili koeficijente "a" i "b", traženog pravca, te je on definisan u koordinatnom sistemu oxy.

Privremenu regulacionu osovinu $\overline{AB}$ postavimo po sredini ulice, odmjerajući polovinu projektovane širine ulice od jedne strane.

Privremenu osovinu $\overline{AB}$ usvojimo za x-osu, sa koordinatnim početkom u tački A (slika 2), a y-osa je okomica na x-osu u tački A.



slika 2

Vrijednosti x_i i y_{m_i} odredjuju se nekom od geodetskih metoda snimanja, koja će nas zadovoljiti po tačnosti, pri čemu treba odrediti i dužinu cijele apscise $\overline{AB} = x_B$. Pomoću ovih podataka formiramo tabelu:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_n

Vrijednosti $y_1,\dots,y_n$ dobiju se po formuli: $y_i=y_{mi}-š/2$, gdje je:

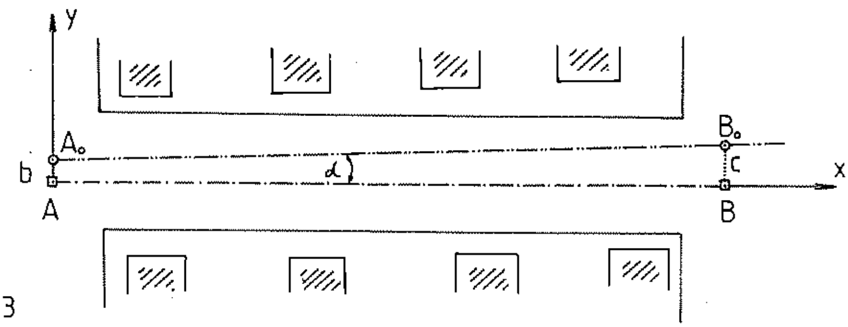
$i= 1,\dots,n$

y_{mi} - mjerna ordinata,

š - projektovana širina ulice.

Ordinatama y_{mi} treba dati odgovarajući predznak, obzirom na stranu ulice. Pomoću ovih tabela formiramo sume: $[xx]$, $[xy]$, $[x]$, $[y]$ i riješimo jednačine (8).

Vrijednost "b" je odsječak traženog pravca na y-osi (sl.3), a vrijednost "a" je tangens ugla koji zaklapa x-osa sa traženim pravcem.

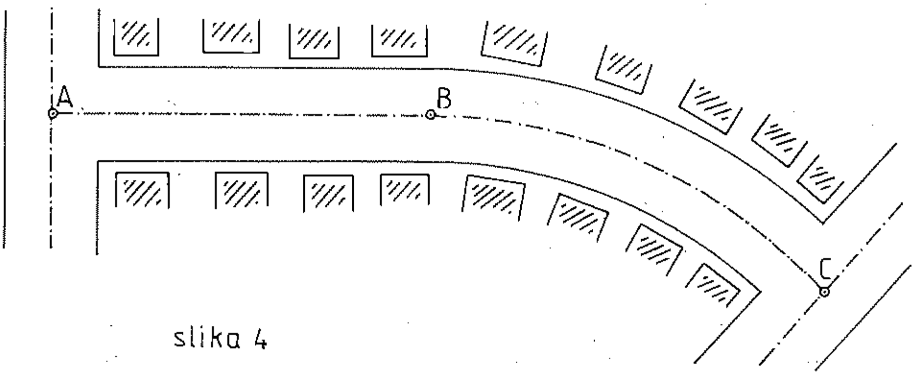


slika 3

Tačke definitivne regulacione osovine A_o i B_o obilježavamo na terenu pomoću vrijednosti "b" i "c", gdje je: $c= b+ax_B$ (9). Na tački A, upravno na pravac $\overline{AB}$ odmjerimo dužinu "b", a na tački B dužinu "c" i fiksiramo tačke A_o i B_o.

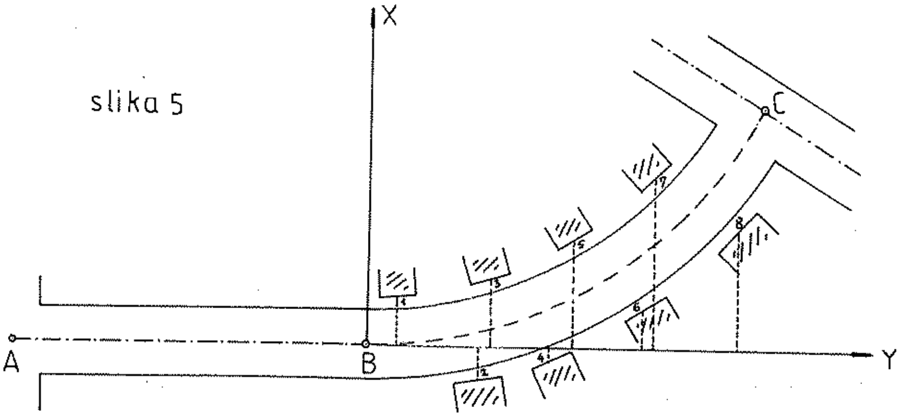
MOŽE NAM SE POJAVITI I OVAKAV SLUČAJ:

Regulacionu osovinu $\overline{AB}$ (sl.4) smo prethodno postavili i potrebno je odrediti položaj osovine $\widehat{BC}$ koja je kružnog oblika. I ovdje ćemo primijeniti metodu najmanjih kvadrata.



slika 4

Pri odredjivanju položaja osovine $\widehat{BC}$ uzimamo u obzir da su tačke A i B fiksirane, da linija $\overline{AB}$ tangira luk $\widehat{BC}$ i da je suma kvadrata odstojanja objekata ϱ_i od luka $\widehat{BC}$ minimalna, tj. $[\varrho\varrho]$ =min (10). Nepoznata vrijednost koju odredjujemo je radijus R.



slika 5

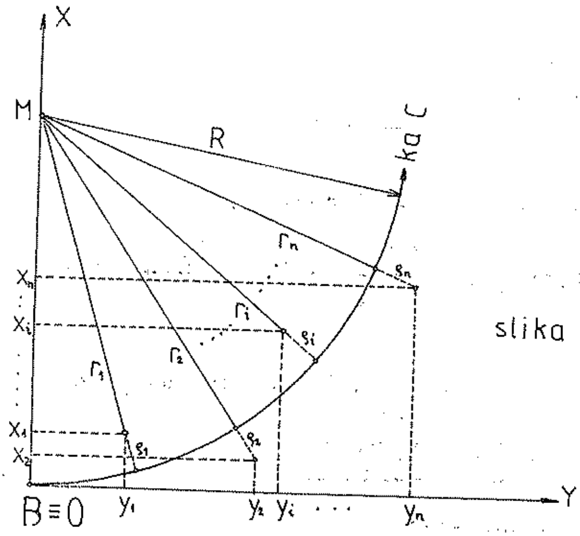
Koordinatni sistem postavimo tako da nam je ishodište u fiksiranoj tački B (slika 5), y-osa leži na regulacionoj osovini $\overline{AB}$, a x-osa je okomita na $\overline{AB}$ u tački B. Jednom od geodetskih metoda odrede se tačne koordinate tačaka zgrada 1,2,3,...,n u lokalnom sistemu xBy.

Sa slike 6 se vidi da je:

$$r_i = \sqrt{(R-x_i)^2 + y_i^2} \tag{11}$$

i

$$\rho_i = R - r_i \qquad (i=1\ldots n) \tag{12}$$



slika 6

Kada se uvrste j-ne (11) u (12) dobije se:

$$\rho_i = R - \sqrt{(R-x_i)^2+y_i^2} \tag{13}$$

pri čemu su vrijednosti x_i i y_i fiksne. Izraz (13) razvije se u okolini približnog rješenja R_o u Taylorov red i odbace se članovi sa prirastima ΔR kvadratnih i većih stepena. Na taj način dobijemo:

$$\varrho_{io} = R_o - \sqrt{(R_o-x_i)^2+y_i^2} + \left(1-\frac{R_o-x_i}{\sqrt{(R_o-x_i)^2+y_i^2}}\right)\cdot\Delta R \qquad (14)$$

gdje je $R = R_o + \Delta R$ (15)

Kad primijenimo uslov (10) na jednačinu (14) dobijemo:

$$[\varrho\varrho] = \sum_{i=1}^{n}\left(R_o - r_{io} + \left(1-\frac{R_o-x_i}{r_{io}}\right)\cdot\Delta R\right)^2 = \min \qquad (16)$$

pri čemu je:

$$r_{io} = \sqrt{(R_o-x_i)^2+y_i^2} \qquad (17)$$

Da bi suma (16) bila minimalna, njen prvi izvod treba izjednačiti sa nulom, tj.

$$\frac{d\,[\varrho\varrho]}{d\Delta R} = 0 \qquad (18)$$

Kad primijenimo (18) na (16) imamo:

$$2\sum_{i=1}^{n}\left((R_o-r_{io})\left(1-\frac{R_o-x_i}{r_{io}}\right) + \Delta R\left(1-\frac{R_o-x_i}{r_{io}}\right)^2\right) = 0 \qquad (19)$$

Kada se izraz (19) sredi i riješi po ΔR dobije se:

$$\Delta R = \frac{-\sum_{i=1}^{n}(R_o-r_{io})\left(\frac{R_o-x_i}{r_{io}}-1\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_o-x_i}{r_{io}}-1\right)^2} \qquad (20)$$

pa definitivno R dobijemo po (15).

Vrijednost R_o odredimo grafički sa plana regulacije naselja, sa što je moguće većom tačnosti, da bi definitivni radijus R dobili što tačnije.

Medjutim, zbog nedovoljno blisko odredjenog R_o, potrebno je 2, pa i više puta ponoviti postupak računanja traženog radijusa R, usvajajući pri tome za približnu vrijednost R_o, onu vrijednost R sračunatu u posljednjem ponavljanju. Za definitivni radijus R se usvaja onaj koji zadovolji nejednakost: $|R_j - R_{j-1}| < \Delta$ gdje je:

j - broj ponavljanja

Δ - neka unaprijed zadana vrijednost (npr. Δ=0,01 m)

Odavde možemo analitičkim putem odrediti položaj tačke C. Prednost ove metode je u tome što se korištenjem džepnog računara sav posao može obaviti na terenu, te je ona zbog toga praktična.

LITERATURA

[1] Cvetković, Č.: Primena geodezije u inženjerstvu

[2] Vuletić, V.: Numerička matematika