

Prof.dr Nihad Kapetanović\* Asist. Slobodan Pandžić\*\*

## ODREĐIVANJE VISINSKIH RAZLIKA TEODOLITOM POMOĆU BAZE NA VERTIKALNOJ LETVI

### O. UVOD

U [2] razmotren je način određivanja dužina i visinskih razlika pomoću baze na vertikalnoj letvi. U tom je radu izvršeno i upoređenje tačnosti ovog načina sa tačnosti koja se postiže mjerenjem Reichenbachovim daljinomjerom za dužine. U ovom radu se vrši upoređenje tačnosti oba načina za visinske razlike.

### 1. UPOREĐENJE TAČNOSTI VISINSKIH RAZLIKA ODREĐENIH POMOĆU BAZE NA VERTIKALNOJ LETVI I REICHENBACHOVIM DALJINOMJEROM

#### 1.1. Srednja greška visinske razlike sračunata pomoću baze na vertikalnoj letvi

Ako u jedn.(7) u [2] veličine  $i$  i  $G$  smatramo izmjerenim apsolutno tačno, biće srednja greška  $M_H$  visinske razlike  $\Delta H$

$$M_H = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial L}\right)^2 m^2 L + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha_1}\right)^2 m^2 \alpha_1 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha_2}\right)^2 m^2 \alpha_2} \quad (1)$$

Pošto je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta H}{\partial L} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{s \operatorname{tg} \alpha_1}{L} \\ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha_1} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)^2 \cos^2 \alpha_1} L + \frac{L \operatorname{tg} \alpha_1}{(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)^2 \cos^2 \alpha_1} \frac{1}{L} = \\ &= \frac{s}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{L \cos^2 \alpha_1} \\ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha_2} &= \frac{-L \operatorname{tg} \alpha_1}{(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)^2 \cos^2 \alpha_2} = \frac{-s^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{L \cos^2 \alpha_2} \end{aligned} \quad (2)$$

\* Građevinski fakultet Sarajevo

\*\* Građevinski fakultet Sarajevo

i  $m\alpha_1 = m\alpha_2 = m\alpha$  dobićemo, nakon uvrštenja jedn.(2) u jedn.(1) uz uvažavanje jedn. (17) iz [2] i  $L' - L$  (vidi sl.4a u [2]), formulu za srednju grešku visinske razlike određene pomoću baze na vertikalnoj letvi

$$M_H = \sqrt{\frac{2s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{L^2} (0,0002 \frac{s}{u} + 0,03 t)^2 + \frac{s^2 \delta^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{4} (\delta^2 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2) + \left( \left( \frac{s}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{L \cos^2 \alpha_1} \right)^2 + \left( \frac{-s^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{L \cos^2 \alpha_2} \right)^2 \right) m^2 \alpha} \quad (3)$$

### 1.2. Srednja greška visinske razlike određene Reichenbachovim daljinomjerom

Izraz za srednju grešku  $m_H$  visinske razlike određene Reichenbachovim daljinomjerom glasi s obzirom na jedn.(9a) iz [2]

$$M_H = \sqrt{\left( \frac{\partial \Delta H}{\partial l} \right)^2 m_l^2 + \left( \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} \right)^2 m_\alpha^2 + \left( \frac{\partial \Delta H}{\partial K} \right)^2 m_K^2} \quad (4)$$

Pošto je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta H}{\partial l} &= \frac{1}{2} K \sin 2\alpha = \frac{\Delta H}{l} ; & \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} &= K l \cos 2\alpha ; \\ \frac{\partial \Delta H}{\partial K} &= \frac{1}{2} l \sin 2\alpha = \frac{\Delta H}{K} \end{aligned} \quad (5)$$

Ako (5) uvrstimo u (4) s obzirom na jedn.(25) iz [2] i  $l' = 1$  (vidi sl. 4b u [2]), biće srednja greška visinske razlike određene Reichenbachovim daljinomjerom.

$$m_H = \sqrt{2 \left( \frac{\Delta H}{l} \right)^2 (0,0002 \frac{s}{u} + 0,03 t)^2 + \frac{\Delta H^2 \delta^2}{4} (\delta^2 + 2 \operatorname{tg}^2 (\alpha + \frac{\gamma}{2})) + K^2 l^2 \cos^2 2\alpha m_\alpha^2 + \left( \frac{\Delta H}{K} \right)^2 m_K^2} \quad (6)$$

### 1.3. Upoređenje srednjih grešaka visinskih razlika određenih pomoću baze na vertikalnoj letvi i Reichenbachovim daljinomjerom

Da bismo uporedili srednje greške visinskih razlika određenih pomoću baze na vertikalnoj letvi sa onima određenim Reichenbachovim daljinomjerom, sračunati su najprije za različite dužine i pojedine nagibe terena, tj. za date veličine  $s$  i  $\alpha$  odgovarajući uglovi  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  po formulama (27) i (28) u [2], a zatim srednje greške  $M_H$  visinskih razlika određenih pomoću baze na vertikalnoj letvi po formuli (3) i srednje greške  $m_H$  visinskih razlika određenih Reichenbachovim daljinomjerom po

I A B E L A I

Srednja greška mjerenog ugla  $\alpha \approx \pm 3''$

Gornji broj predstavlja srednju grešku  $Mh$  (u metrima) visinske razlike određene pomoću baze na vertikalnoj letvi,

Srednji broj predstavlja srednju grešku  $mh$  (u metrima) visinske razlike određene Reichenbachovim daljinomjerom,

Donji broj predstavlja odnos  $mh/Mh$ .

$\alpha$	10m	20m	50m	100m	150m	200m	250m	300m	$\alpha$	10m	20m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.12	0.42	1.07	1.20	1.23	1.24	1.25	1.25		0.12	0.42	1.07	1.20	1.23	1.24	1.25	1.25
2°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	-2°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03
2°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	-2°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02
	2.00	6.48	3.07	2.02	1.36	1.02	0.87	0.68		1.37	2.97	3.48	2.01	1.38	1.04	0.83	0.67
5°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07	-5°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07
5°	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05	-5°	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.04
	18.15	6.27	2.96	1.84	1.31	1.01	0.82	0.68		3.53	3.61	3.57	1.93	1.33	1.02	0.87	0.68
10°	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.10	0.14	-10°	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.10	0.14
10°	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10	-10°	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10
	5.35	2.81	1.91	1.40	1.19	0.99	0.83	0.72		14.43	5.11	2.27	1.56	1.22	0.99	0.83	0.71
15°	0.00	0.01	0.02	0.05	0.09	0.13	0.18	0.25	-15°	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.13	0.18	0.24
15°	0.01	0.02	0.04	0.07	0.10	0.12	0.15	0.18	-15°	0.01	0.02	0.04	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
	2.96	1.94	1.48	1.26	1.10	0.97	0.85	0.75		8.49	2.83	1.67	1.31	1.12	0.97	0.84	0.74
20°	0.01	0.02	0.04	0.07	0.15	0.21	0.29	0.38	-20°	0.00	0.01	0.04	0.07	0.14	0.21	0.29	0.38
20°	0.02	0.03	0.06	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	-20°	0.02	0.03	0.05	0.10	0.15	0.20	0.24	0.29
	2.12	1.53	1.26	1.14	1.05	0.95	0.86	0.78		4.06	2.81	1.38	1.18	1.05	0.95	0.86	0.77
25°	0.02	0.03	0.07	0.14	0.23	0.32	0.44	0.57	-25°	0.01	0.02	0.07	0.14	0.22	0.32	0.43	0.56
25°	0.03	0.04	0.09	0.16	0.23	0.31	0.38	0.46	-25°	0.02	0.04	0.08	0.15	0.23	0.30	0.37	0.45
	1.66	1.30	1.15	1.08	1.01	0.94	0.87	0.81		2.66	1.60	1.22	1.10	1.02	0.94	0.87	0.80
30°	0.02	0.04	0.11	0.22	0.34	0.48	0.63	0.81	-30°	0.02	0.04	0.10	0.21	0.33	0.47	0.63	0.81
30°	0.03	0.05	0.12	0.23	0.34	0.45	0.56	0.67	-30°	0.03	0.05	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66
	1.38	1.17	1.08	1.04	0.99	0.94	0.88	0.82		1.99	1.37	1.14	1.05	0.99	0.93	0.87	0.81

TABELA 2

Srednja greška mjerenog ugla  $\alpha \pm 5''$ Gornji broj predstavlja srednju grešku  $Mh$  (u metrima) visinske razlike određene pomoću baze na vertikalnoj letvi,Srednji broj predstavlja srednju grešku  $mh$  (u metrima) visinske razlike određene Reichenbachovim daljinomjerom,Donji broj predstavlja odnos  $mh/Mh$ .

$\alpha \pm$	10m	20m	50m	100m	150m	200m	250m	300m	$\alpha \pm$	10m	20m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.19	0.65	1.22	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31
1°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04
	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	1.98	4.76	2.55	1.36	0.92	0.70	0.56	0.47	
2°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.10	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.10	0.10
	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	14.83	5.58	2.44	1.35	0.92	0.69	0.55	0.46	
3°	0.00	0.00	0.01	0.03	0.06	0.10	0.15	0.21	0.00	0.00	0.01	0.03	0.06	0.10	0.15	0.21	0.21
	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10	5.30	2.77	1.78	1.23	0.91	0.72	0.59	0.49	
4°	0.00	0.01	0.03	0.06	0.10	0.17	0.25	0.34	0.00	0.01	0.02	0.06	0.10	0.16	0.24	0.34	0.34
	0.01	0.02	0.04	0.07	0.10	0.12	0.15	0.18	2.95	1.93	1.42	1.12	0.91	0.75	0.63	0.54	
5°	0.01	0.02	0.04	0.10	0.17	0.26	0.37	0.51	0.01	0.02	0.04	0.09	0.16	0.26	0.37	0.51	0.51
	0.02	0.03	0.06	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	2.12	1.53	1.23	1.05	0.90	0.77	0.67	0.58	
6°	0.02	0.03	0.07	0.15	0.26	0.39	0.54	0.73	0.02	0.03	0.04	0.08	0.15	0.23	0.30	0.37	0.45
	0.03	0.04	0.08	0.16	0.23	0.31	0.38	0.46	1.66	1.30	1.13	1.01	0.90	0.79	0.70	0.62	
7°	0.02	0.04	0.11	0.23	0.39	0.56	0.77	1.03	0.02	0.04	0.10	0.22	0.37	0.55	0.76	1.02	1.02
	0.03	0.05	0.12	0.23	0.34	0.45	0.56	0.67	1.38	1.16	1.07	0.99	0.90	0.81	0.72	0.65	

TABELA 3

Srednja greška nješenog ugla  $\alpha = 110''$

Gornji broj predstavlja srednju grešku  $Mh$  (u metrima) visinske razlike određene pomoću baze na vertikalnoj letvi;

Srednji broj predstavlja srednju grešku  $mh$  (u metrima) visinske razlike određene Reichenbachovim daljinomjerom,

Donji broj predstavlja odnos  $mh/Mh$ .

$\alpha$	10m	20m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
	0.37	0.99	1.31	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33
2°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	0.08
2°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02
	1.91	2.91	1.47	0.82	0.57	0.43	0.35	0.29
5°	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.09	0.13	0.19
5°	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05
	9.30	3.99	1.57	0.78	0.51	0.38	0.30	0.25
10°	0.00	0.00	0.02	0.05	0.10	0.18	0.27	0.39
10°	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10
	5.00	2.50	1.40	0.78	0.53	0.40	0.32	0.27
15°	0.00	0.01	0.03	0.08	0.17	0.28	0.43	0.62
15°	0.01	0.02	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.18
	2.93	1.87	1.23	0.80	0.57	0.44	0.36	0.30
20°	0.01	0.02	0.05	0.13	0.25	0.42	0.64	0.98
20°	0.02	0.03	0.06	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	2.11	1.50	1.12	0.81	0.61	0.46	0.39	0.33
25°	0.02	0.03	0.08	0.19	0.36	0.59	0.89	1.25
25°	0.03	0.04	0.08	0.16	0.23	0.31	0.38	0.46
	1.66	1.20	1.05	0.81	0.64	0.51	0.43	0.36
30°	0.02	0.04	0.12	0.28	0.51	0.83	1.23	1.72
30°	0.03	0.05	0.12	0.23	0.34	0.45	0.56	0.67
	1.38	1.15	1.00	0.82	0.66	0.54	0.45	0.39

$\alpha$	10m	20m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
	0.37	0.99	1.31	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33
2°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07
-2°	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02
	1.37	2.46	1.90	1.01	0.66	0.49	0.38	0.32
5°	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.13	0.19
-5°	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05
	3.44	5.51	1.91	0.85	0.54	0.40	0.31	0.26
10°	0.00	0.00	0.01	0.05	0.10	0.17	0.27	0.39
-10°	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.09	0.10
	12.13	4.35	1.61	0.82	0.55	0.41	0.32	0.27
15°	0.00	0.01	0.03	0.08	0.16	0.28	0.43	0.61
-15°	0.01	0.02	0.04	0.05	0.09	0.12	0.15	0.18
	8.03	2.68	1.36	0.82	0.58	0.44	0.35	0.30
20°	0.00	0.01	0.05	0.12	0.24	0.41	0.63	0.89
-20°	0.02	0.03	0.05	0.10	0.15	0.20	0.24	0.29
	4.31	1.55	1.21	0.82	0.61	0.48	0.39	0.33
25°	0.01	0.02	0.07	0.18	0.35	0.57	0.88	1.24
-25°	0.02	0.04	0.08	0.15	0.23	0.30	0.37	0.45
	2.64	1.57	1.11	0.83	0.64	0.51	0.42	0.36
30°	0.02	0.04	0.11	0.27	0.50	0.82	1.22	1.71
-30°	0.03	0.05	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66
	1.98	1.35	1.05	0.83	0.66	0.54	0.45	0.38

formuli (6). Pri tome je uzeto:

- veličina baze na vertikalnoj letvi  $L = 3$  m,
- odsječak na letvi kod Reichenbachovog daljinomjera promjenljiv u zavisnosti od vertikalnog ugla,
- uvećanje dubina  $u = 25$  x,
- najmanji podiok na letvi  $t = 0,01$  m,
- odstupanje letve od vertikalnog položaja  $\delta^\circ = 0,5$ , što znači  $\delta = 0,5/\delta^\circ$  (letva se u vertikalni položaj dovodi pomoću kružne libele),
- visinska razlika  $\Delta H = -s \operatorname{tg} \alpha$ ,
- multiplikaciona konstanta  $K = 100$ , srednja gdreška  $m_K = \pm 0,1$ , dok je srednja greška vertikalnog ugla varirana. Tako su u tabeli 1 prikazane vrijednosti  $M_H$  i  $m_H m_{\alpha''} = \pm 3''$ , u tabeli 2 za  $m_{\alpha''} = \pm 5''$ , a u tabeli 3 za  $m_{\alpha''} = \pm 10''$ . Takođe su prikazani i odgovarajući odnosi  $m_H/M_H$ .

Iz Tabele 1 zaključujemo da uz visoku tačnost mjerenja vertikalnih uglova ( $m_{\alpha''} = \pm 3''$ ) određivanje visinskih razlika pomoću baze na vertikalnoj letvi ima prednost u odnosu na određivanje Reichenbachovim daljinomjerom za strane do 200 m ukoliko se radi o ravnom ili blago nagnutom terenu, dok se za strmiji teren ta granica postepeno smanjuje, da bi se za vrlo strme terene (nagiba  $25^\circ$ - $30^\circ$ ) spustila na oko 150 metara.

Ako je vertikalni ugao mjeran sa nešto većom srednjom greškom ( $m_{\alpha''} = \pm 5''$ -Tabela 2) granica prednosti se smanjuje na nešto više od 100 metara za horizontalan i blago nagnut teren, odnosno na oko 100 metara za vrlo strm teren (nagiba  $25^\circ$ - $30^\circ$ ).

Najzad, za vertikalne uglove mjerene sa srednjom greškom od  $\pm 10''$  (Tabela 3) ta se granica spušta na oko 80 metara za ravan i blago nagnut teren, odnosno na oko 50 metara za vrlo strm teren.

Praktična mjerenja i upoređenja sa mjerenjima izvršenim Reichenbachovim daljinomjerom, koja je u okviru svoga diplomskog rada obavio u proljeće 1989. godine Ferid Durmišević potvrdila su ove teoretske pretpostavke.

Upoređujući Tabele 1, 2, 3 iz reda [2], koje se odnose na dužine, sa odgovarajućim tabelama iz ovog rada, koje se odnose na visinske razlike, dolazimo do zaključka da se granice u kojima opisana metoda ima prednost u odnosu na Reichenbachovu praktično podudaraju za dužine i visinske razlike. Ovo je od važnosti s obzirom da se u slučaju polarnog snimanja dužine i visinske razlike određuju uporedo.

## 2. ZAKLJUČAK

Na osnovu ovog i rada [2] možemo izvesti jedinstveni zaključak: Ako je obezbijedena dovoljno visoka tačnost mjerenja vertikalnih uglova, onda se opisanim načinom mjerenja - teodolitom pomoću baze na vertikalnoj letvi - dužine i visinske razlike određuju tačnije nego Reichenbachovim daljinomjerom. Stepenn povećanja tačnosti poklapa se za dužine i visinske razlike, a prvenstveno zavisi od dužine i utoliko je veći ukoliko su strane kraće, a zatim i od nagiba terena i veći je ukoliko je teren ravniji.

Korištenjem baze duže od tri metra postigla bi se još veća tačnost, ali je takva baza tehnički teško ostvarljiva.

S obzirom da je u naseljima poligonska mreža u pravilu dosta gusta, što znači da su dužine od pola do detaljnih tačaka relativno kratke i nevelikog nagiba, predloženim načinom moguće je vršiti tahimetrijsko snimanje sa zadovoljavajućom tačnošću korištenjem jednostavnog pribora.

#### LITERATURA

- [1] Boljšakov, V.D., Gorbenko O.I., Klimov O.D. i dr.: Visokotočne geodizečke izmerenija dlja stroiteljstva i montaža Boljšogo Serpuhovskogo uskoritelja, Nedra 1968.
- [2] Kapetanović N., Pandžić S.: Određivanje dužina pomoću baze na vertikalnoj letvi, "Geodetski glasnik" Sarajevo, br.27/1989.
- [3] Mihailović, K., Vračarić, K.: Geodezija I, Beograd 1984.
- [4] Mihailović, K., Vračarić, K.: Geodezija III, Beograd 1985.
- [5] Vukotić Nj., Zimić Š., Zimić A.: Primjena trigonometrijskog nivelmana u određivanju visina gradske poligonske mreže, "Geodetski glasnik", Sarajevo, br. 26/1988.