

Prof.dr Smail Pašalić*

UTICAJ TAČNOSTI KOTA I KOORDINATA STABILNIH TAČAKA NA TAČNOST ODREĐIVANJA POMJERANJA TERENA

0. UVOD

Određivanje kota i koordinata stabilnih tačaka vrši se uglavnom u prvoj (nultoj) seriji mjerenja. Izuzetno se može desiti da se neke stabilne tačke naknadno određuju ili se usvajaju iz postojećih tačaka na kojima nije utvrđeno pomjerenje. Ovo će se desiti ako u toku praćenja pomjerenja veći broj na početku utvrđenih stabilnih tačaka postane nestabilan i tako ostanemo sa nedovoljnim brojem stabilnih tačaka, što je u praksi rijedak slučaj.

Cilj ovog rada je da pokaže da tačnost određivanja kota i koordinata stabilnih tačaka nema uticaja na tačnost određivanja pomjerenja terena (tačaka).

1. VERTIKALNO POMJERANJE

Pretpostavimo da imamo stabilne repere 1 i 2. Istiniti položaj ovih repere (istinite kote) označimo sa 1 i 2 (slika 1). Usljed grešaka mjerenja njihove kote pomjerene su u položaj 1' i 2'.

Neka pomoću ovih repere određujemo pomjerenje po visini repere 3.

Istiniti položaj repere 3 označimo sa 3, a nakon pomjerenja sa 3_p (3 pomjereno). Kotu repere u prvoj seriji mjerenja dobijenu pomoću kote 1', označimo sa 3', a pomoću kote 2' sa 3''. Njihovu aritmetičku sredinu označimo sa $\bar{3}$.

$$\bar{3} = \frac{3' + 3''}{2} \quad (1)$$

U drugoj seriji mjerenja (nakon visinskog pomjerenja repere 3) označimo dobijene kote sa 3'_p i 3''_p a njihovu aritmetičku sredinu sa $\bar{3}_p$.

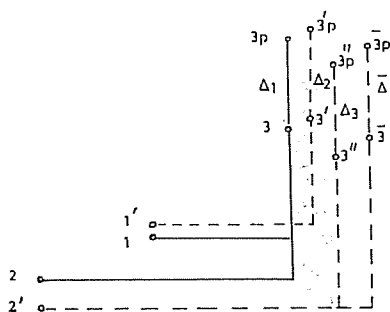
$$\bar{3}_p = \frac{3'_p + 3''_p}{2} \quad (2)$$

Iz slike 1 se vidi da su visinska pomjerenja

* Građevinski fakultet Sarajevo

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta. \quad (3)$$

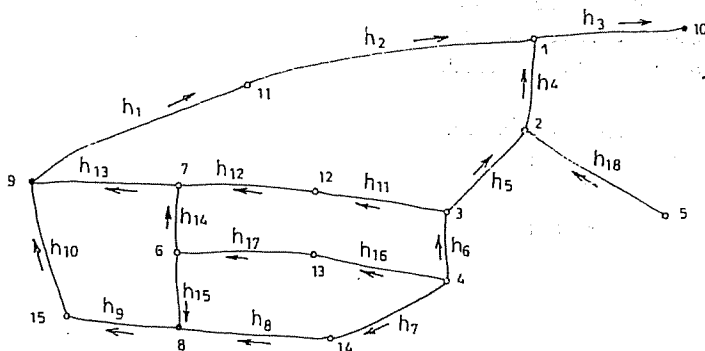
Dakle, greške u kotama stabilnih repera 1 i 2 nisu uticale na tačnost određivanja visinskog pomjeranja repera 3, jer jednakost 3 (odnosno slika 1) pokazuje da je $\Delta_1 = \Delta$. Slijedeći primjer potvrdiće ovu konstataciju.



sl. 1

Primjer 1:

U mreži datoj na slici 2, pomoću mjerenja datih u tabeli 1 (1 iz serija), će pokazati da greške kota dokazano stabilnih tačaka 8, 9 i 10 od nekoliko santimetara praktično ne utiču na određivanje visinskih pomjeranja.



sl. 2

Dati podaci:

$$H_8 = 199,9244 \text{ m}, H_9 = 217,6742 \text{ m}, H_{10} = 228,5717 \text{ m}$$

Mjerene visinske razlike :

Tabela 1.

i	1.serija $h_i(\text{m})$	2.serija $h_i(\text{m})$
1	3,1505	3,1180
2	0,1605	0,2022
3	7,5857	7,5779
4	8,5036	8,5061
5	9,5053	9,5052
6	14,7739	14,7737
7	0,9864	0,9846
8	10,7334	10,7299
9	1,0153	1,0168
10	16,7342	16,7333
11	0,2291	0,2263
12	8,6470	8,6519
13	5,8198	5,8154
14	12,5908	12,5937
15	0,6612	0,6587
16	4,4889	4,4955
17	6,5693	6,5607
18	3,0877	3,0883

Rješenje:

Polazeći od stabilnih tačaka, mreža je izravnata za prvu i drugu seriju mjerenja. Rezultati ovih izravnanja vide se u tabeli 2, s tim da su ovoj tabeli pridodate greške kota u prvoj seriji $m_{\Delta H_{i,1}}$ (u drugoj seriji su iste, jer su $m_1 \approx m_2$), pomjeranja tačaka (ΔH_i) i srednje greške sa kojima su određena pomjeranja ($m_{\Delta H_i}$).

Srednje greške $m_{\Delta H_i}$ dobijaju se na slijedeći način:

$$\Delta H_i = H_{i,2} - H_{i,1}$$

$$m_{\Delta H_i} = \sqrt{m_{H_{i,1}}^2 + m_{H_{i,2}}^2},$$

$$\text{za } m_{H_{i,1}} = m_{H_{i,2}} = m_{H_i}$$

dobija se

$$m_{\Delta H_i} = m_{H_i} \sqrt{2}$$

$m_{\Delta H_i}$

Tabela 2

i	$H_{i,1}(m)$	$m\Delta H_{i,1}(mm)$	$H_{i,2}(m)$	$\Delta H_i(mm)$	$m\Delta H_i(mm)$
1	220,9860	0,4	220,9939	7,9	0,56
2	212,4828	0,5	212,4877	5,1	0,71
3	202,9779	0,5	202,9824	4,5	0,71
4	188,2044	0,5	188,2092	4,8	0,71
5	209,3951	0,8	209,3994	4,3	1,13
6	199,2631	0,4	199,2656	2,5	0,56
7	211,8541	0,4	211,8594	5,3	0,56
8	199,9244	0,0	199,9244	0,0	0,00
9	217,6742	0,0	217,6742	0,0	0,00
10	228,5717	0,0	228,5717	0,0	0,00
11	220,8251	0,5	220,7920	33,1	0,71
12	203,2071	0,5	203,2081	1,0	0,71
13	192,6935	0,5	192,7048	11,3	0,71
14	189,1909	0,5	189,1941	3,2	0,71
15	200,9398	0,4	200,9410	1,2	0,56

Srednje greške:

za 1.seriju, $m_1 = 0,50$ mm

za 2.seriju, $m_2 = 0,55$ mm

Sada se koriste ista mjerenja iz tabele 1, a stabilne tačke su pomjerene (pogrešne) prema tabeli 3.

Tabela 3

i	Date $H_i(m)$	Pomjerene $H_i(m)$	Pomjeranje PH_i
8	199,9244	199,9356	11,2 mm
9	217,6742	217,6538	-20,4 mm
10	228,5717	228,5786	6,9 mm

Nakon izravnjanja mreže sa ovako pomjerenim kotama stabilnih tačaka i sa istim mjerenjima h_i , dobijaju se rezultati koje prikazuje tabela 4. Razliku kota (pomjeranja) dobijenu pomoću ovako pomjerenih stalnih tačaka označićemo sa $\Delta H_i^{(P)}$. Sa ΔH_i označena su pomjeranja dobijena pomoću datih stabilnih tačaka (Tabela 2):

Tabela 4

i	$H_{i,1}(m)$	$H_{i,2}(m)$	$\Delta H_i^{(P)}$	$\Delta H_i(mm)$
1	220,9841	220,9920	7,9	7,9
2	212,4814	212,4863	4,9	5,1
3	202,9770	202,9814	4,4	4,5
4	188,2072	188,2120	4,8	4,8
5	209,3937	209,3980	4,3	4,3
6	199,2652	199,2677	2,5	2,5
7	211,8464	211,8518	5,2	5,3
8	199,9356	199,9356	0,0	0,0
9	217,6538	217,6538	0,0	0,0
10	228,5786	228,5786	0,0	0,0
11	220,8140	220,7808	-33,2	-33,1
12	203,2029	203,2038	0,9	1,0
13	192,6960	192,7072	11,2	11,3
14	189,1979	189,2012	3,3	3,2
15	200,9352	200,9364	1,2	1,2

Srednje greške visinskih razlika:

za 1.seriju $m_1 = 13,92$ mm

za 2.seriju $m_2 = 14,10$ mm

Ova tabela pokazuje da, iako su kote stabilnih tačaka pomjerene za 11,2 , -20,4 i 6,9 mm, to nije uticalo na određivanje pomjeranja ostalih tačaka ($\Delta H_i^{(P)} = \Delta H_i$).

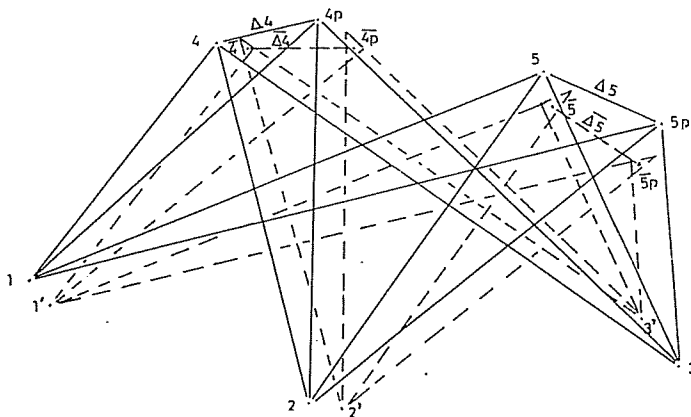
Srednje greške visinskih razlika, govore o tačnosti određivanja kota u ovoj mreži, a ne o tačnosti mjerenja niti o tačnosti određivanja pomjeranja. One se ustvari sastoje, od grešaka mjerenja i grešaka datih kota. Srednje greške mjerenja m_1 i m_2 (oslobodene grešaka datih kota) mogu se dobiti nakon izravnjanja ove mreže kao slobodne mreže. One iznose:

$$m_1 = 0,53 \text{ mm}; \quad m_2 = 0,60 \text{ mm}$$

2. HORIZONTALNO POMJERANJE

Pretpostavimo da imamo stabilne tačke po položaju 1, 2 i 3. Istiniti položaj ovih tačaka (istinite koordinate) označen je sa 1, 2 i 3 (slika 3).

Usljed grešaka mjerenja njihove koordinate pomjerene su u položaje 1', 2' i 3'. Neka pomoću ovih tačaka određujemo pomjeranja, po položaju tačaka 4 i 5. Istiniti položaj ovih tačaka u prvoj seriji označimo sa 4 i 5, a nakon pomjeranja u drugoj seriji sa 4p-i 5p (slika 3).



sl. 3

Najvjerovatniji položaj tačaka 4 i 5, u prvoj seriji mjerenja dobijen pomoću tačaka 1', 2' i 3' označimo sa $\bar{4}$ i $\bar{5}$.

Ovaj najvjerovatniji položaj, kako je poznato, nalazi se u težištu odgovarajućeg trougla (sl.3).

U drugoj seriji, nakon horizontalnog pomjeranja tačaka 4 i 5, dobijamo njihov najvjerovatniji položaj, koji označimo sa $\bar{4}_p$ i $\bar{5}_p$.

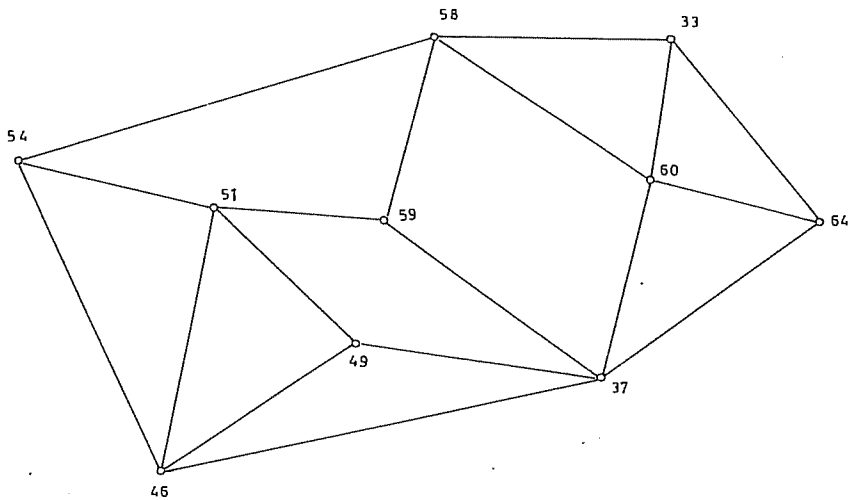
Iz slike se vidi da su stvarna pomjeranja $\Delta 4$ i $\Delta 5$ praktično jednaka, pomjeranjima $\bar{\Delta} 4$ i $\bar{\Delta} 5$ odnosno pomjeranjima između bilo koja dva odgovarajuća tjemena trougla u čijim se težištima nalaze najvjerovatnije vrijednosti, tj.

$$\Delta 4 \approx \bar{\Delta} 4 \text{ i } \Delta 5 \approx \bar{\Delta} 5 \quad (4)$$

Slijedeći primjer (primjer 2) potvrđuje ovu konstataciju:

Primjer 2:

U mreži datoj na slici 4, pomoću mjerenja datih u tabeli 5 (1 i 2 serija) pokazati da greške koordinata dokazano stabilnih tačaka 64, 46 i 54 od nekoliko desetina santimetara, praktično ne utiču na određivanje horizontalnih pomjeranja.



sl. 4

Dati podaci:

$$X_{46} = 34666,415 \text{ m}; \quad Y_{46} = 52856,824 \text{ m}; \quad \nu_{46}^{54} = 38^\circ 25' 39,7''$$

Mjereni podaci:

$$\text{Dužina: } d_{46-54} = 1248,270$$

Pravci:

Tabela 5

i	1.serija		2.serija		i	1.serija		2.serija	
	o	”	”	”		o	”	”	”
Stanica 58					Stanica 49				
54	47 43 00,8		43 08,7		46	00 00 00,0		00 00,0	
33	232 51 09,4		51 15,4		51	85 34 20,3		34 18,0	
60	273 44 29,0		44 52,1		37	212 56 37,0		56 41,7	
59	351 26 15,1		26 26,2						
Stanica 46					Stanica 51				
51	00 00 00,0		00 00,0		54	00 00 00,0		00 00,0	
49	46 23 40,6		23 29,3		59	186 46 23,6		46 04,1	
37	62 49 29,2		49 21,9		49	229 18 58,1		18 49,9	
54	293 18 07,4		17 58,0		46	227 20 55,3		21 01,6	
Stanica 59					Stanica 64				
51	00 00 00,0		00 00,0		37	00 00 00,0		00 00,0	
58	104 26 39,1		26 52,3		60	43 34 07,1		34 02,8	
37	205 57 22,6		57 37,2		33	75 53 40,7		53 44,8	
Stanica 54					Stanica 33				
46	00 00 00,0		00 00,0		64	00 00 00,0		00 00,0	
58	316 50 53,1		50 52,8		60	50 14 03,0		14 02,1	
51	329 20 58,6		21 04,6		58	133 41 15,9		41 10,8	
Stanica 60					Stanica 37				
37	00 00 00,0		00 00,0		46	00 00 00,0		00 00,0	
58	111 49 59,2		50 16,0		49	16 30 47,0		30 52,0	
33	167 29 25,6		29 35,1		59	52 33 24,5		33 26,9	
64	264 55 52,9		55 50,9		60	121 30 52,1		30 50,3	
					64	162 52 38,3		52 38,5	

Rješenje:

Polazeći od stabilnih tačaka mreža je izravnata za prvu i drugu seriju mjerenja. Rezultati ovih izravnjanja vide se u tabeli 6, s tim da su u ovoj tabeli sračunate razlike ΔX_i i ΔY_i .

Tabela 6.

i	1. serija		2. serija		$\Delta X_i(\text{cm})$	$\Delta Y_i(\text{cm})$
	$X_i(\text{m})$	$Y_i(\text{m})$	$X_i(\text{m})$	$Y_i(\text{m})$		
37	3771,081	3047,940	3771,009	3047,932	1,8	-0,8
59	4173,537	3391,757	4173,556	3391,760	1,9	0,3
49	4245,817	3084,998	4245,809	3085,003	-0,8	0,5
58	3963,035	3771,598	3963,030	3771,626	0,5	2,8
60	3621,391	3471,475	3621,408	3471,474	1,7	-0,1
33	3585,105	3768,896	3585,109	3768,923	0,4	2,7
51	4498,987	3476,231	4498,961	3476,200	-2,6	-3,1
64	3204,213	3364,391	3204,213	3364,391	0,0	0,0
46	4666,415	2856,824	4666,415	2856,824	0,0	0,0
54	5644,301	3632,657	5644,301	3632,657	0,0	0,0

Sada se koriste ista mjerenja iz tabele 5, a stabilne tačke su pomjerene (pogrešne) prema tabeli 7:

Tabela 7.

i	Date koordinate		Pomjerene koordinate		Razlike	
	$X_i(\text{m})$	$Y_i(\text{m})$	$X_i(\text{m})$	$Y_i(\text{m})$	$p_x(\text{cm})$	$p_y(\text{cm})$
64	3204,213	3364,391	3204,105	3364,508	20,8	-11,7
46	4666,415	2856,824	4666,635	2856,601	-22,0	22,3
54	5644,391	3632,657	5644,190	3632,508	11,1	14,9

Nakon izravnjanja mreže sa ovako promijenjenim koordinatama stabilnih tačaka i sa istim mjerenjima (tabela 5), dobijaju se rezultati koje prikazuje tabela 8. Razlika koordinata (pomjeranja) dobijena pomoću ovako pomjerenih tačaka označavaćemo sa $\Delta X_i^{(P)}$ i $\Delta Y_i^{(P)}$. Sa ΔX_i i ΔY_i označena su pomjeranja dobijena pomoću datih stabilnih tačaka (Tabela 6).

Tabela 8.

i	1.serija		2.serija		$\Delta X_i^{(P)}$ (cm)	ΔX_i (cm)	$\Delta Y_i^{(P)}$ (cm)	ΔY_i (cm)
	$X_i(m)$	$Y_i(m)$	$X_i(m)$	$Y_i(m)$				
37	33771,074	53047,838	33771,092	53047,831	1,8	1,8	-0,7	-0,8
59	34173,607	53391,648	34173,626	53391,651	1,9	1,9	0,3	0,3
49	34245,935	53085,851	34245,927	53084,855	-0,8	-0,8	0,4	0,5
58	33963,082	53771,628	33963,078	53771,657	-0,4	-0,5	2,9	2,8
60	33621,383	53471,542	33621,401	53471,540	1,8	1,7	-0,2	-0,1
33	33585,140	53768,991	33585,144	53769,018	0,4	0,4	2,7	2,7
51	34499,169	53476,131	34499,143	53476,100	-2,6	-2,6	-3,1	-3,1
64	33204,105	53364,508	33204,105	53364,508	0,0	0,0	0,0	0,0
46	34666,635	52856,601	34666,635	52856,601	0,0	0,0	0,0	0,0
54	35644,190	53632,508	35644,190	53632,508	0,0	0,0	0,0	0,0

Srednja greška pravca:

za 1.seriju $m = 21,59''$

za 2.seriju $m = 21,88''$

Ova tabela pokazuje da, iako su koordinate stabilnih tačaka pomjerene od -22,0 do 22,3 cm (tabela 7), to nije uticalo na određivanje pomjeranja ($\Delta X_i^{(P)} = \Delta X_i$, $\Delta Y_i^{(P)} = \Delta Y_i$).

Srednje greške pravca m_p , govore o tačnosti određivanja elemenata ove mreže, a ne o tačnosti mjerenja niti o tačnosti određivanja pomjeranja. One se ustvari, sastoje od grešaka mjerenja i grešaka datih koordinata. Srednje greške pravca (oslobodjene grešaka datih koordinata), mogu se dobiti nakon izravnjanja ove mreže kao slobodne mreže. U tom slučaju one iznose:

za 1.seriju $m = 1,16''$

za 2.seriju $m = 1,67''$

3. ZAKLJUČAK

Iz slike 1 i 3, odnosno jednakosti (3) i (4) je vidljivo da tačnost kota i koordinata stabilnih tačaka praktično ne utiče na tačnost određivanja pomjeranja. Ovo potvrđuju i primjeri 1 i 2.

Ovaj zaključak vrijedi samo onda ako u toku ispitivanog perioda za stabilne tačke koristimo iste kote i koordinate. Drugim riječima to znači, da u toku ispitivanog perioda treba uzimati iste kote i koordinate stabilnih tačaka u svakoj seriji mjerenja bez obzira na tačnost njihova određivanja.

Samo u tom slučaju greške određivanja kota i koordinata stabilnih tačaka neće uticati na tačnost određivanja pomjeranja.