Smail Pašalić*

STROGA OCJENA TAČNOSTI PRI IZRAVNANJU JEDNE TRIANGULACIONE TAČKE

REZIME. U radu se prikazuje kako treba vršiti ocjenu tačnosti izravnatih pojedinačnih triangulacionih tačaka, ako hoćemo da ta ocjena bude zasnovana na teoriji najmanjih kvadrata.

Navodi se i numerički primjer koji ilustruje ovu teoriju.

1. UVOD

Poznato je kako se na uprošćen način vrši izravnanje jedne triangulacione tačke (10. ili 11. obrazac). Naime, ovdje se svi pravci sa spoljne tačke na date i traženu tačku zamjenjuju jednim takozvanim orjentacionim pravcem. Pod uslovom da se vodi računa o težinama orjentacionih pravaca, dobiće se potpuno iste koordinate tražene tačke, kao i da smo koristili sve pravce kako to teorija izravnanja propisuje. Pri tome, ocjena tačnosti na način kako se vrši, samo je približna i mada najčešće zadovoljava praktične potrebe, ima slučajeva kada se ona bitno razlikuje od stroge ocjene tačnosti. Ovu razliku najbolje pokazuje primjer koji se u ovom radu navodi.

2. TEORIJA IZRAVNANJA JEDNE TRIANGULACIONE TAČKE.

Slika 1 pokazuje raspored tačaka i pravaca oko tražene tačke k. Kao što je poznato iz opšte teorije posrednog izravnanja, imamo toliko jednačina grešaka koliko imamo mjerenja (pravaca). Dakle, pri određivanju koordinata tačke k imamo na njoj u pravaca i na svakoj okolnoj tački i, $m_i + 1$ pravaca (slika 1).

Ovim $m_i + 1$ pravaca odgovara, prema slici 1, $m_i + 1$ jednačina grešaka:

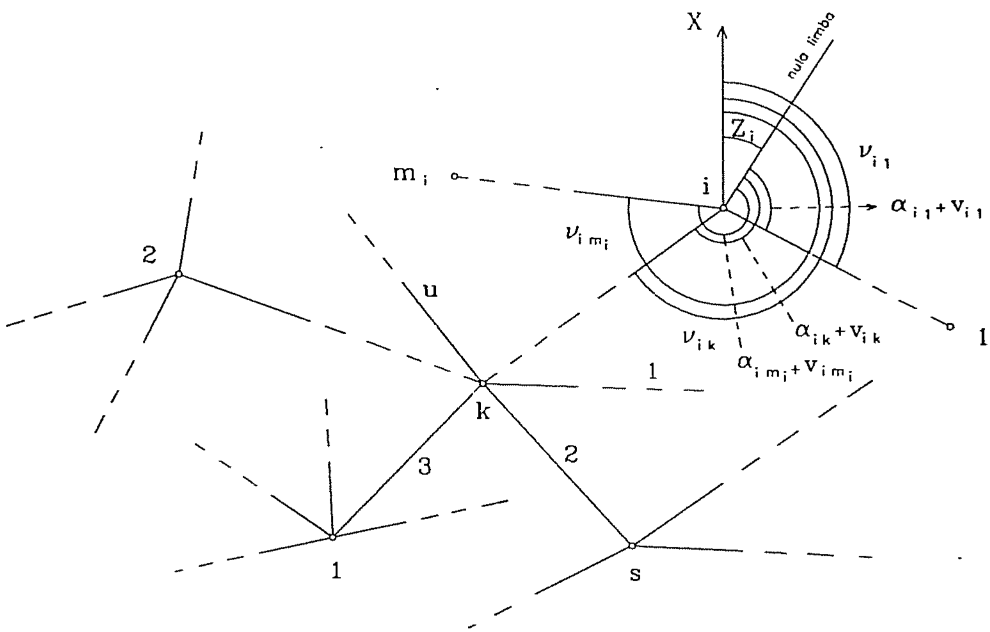
$$Z_i + \alpha_{i1} + v_{i1} = \nu_{i1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_i + \alpha_{im_i} + v_{im_i} = \nu_{im_i}$$

$$Z_i + \alpha_{ik} + v_{ik} = \nu_{ik} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i}\right) .$$

* Prof.dr SMAIL PAŠALIĆ, dipl.inž.geod.
Građevinski fakultet Sarajevo, Hasana Brkića 24



sl. 1

Odavde je:

$$\left.\begin{aligned}
v_{i1} &= -Z_i + \qquad\qquad\qquad + \nu_{i1} - \alpha_{i1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{im_i} &= -Z_i + \qquad\qquad\qquad + \nu_{im_i} - \alpha_{im_i} \\
v_{ik} &= -Z_i + a_{ki}\,\Delta X_k + b_{ki}\,\Delta Y_k + \nu^o_{ik} - \alpha_{ik}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

U [L.1, str. 359, 360] dokazuje se da se jednačine grešaka (1), mogu zamjeniti jednom jednačinom slijedećeg oblika:

$$v'_{ik} = a_{ki}\,\Delta X_k + b_{ki}\,\Delta Y_k + \nu^o_{ik} - \varphi_{ik} \quad \text{sa težinom } m_i/(m_i+1)$$

gdje je: $\varphi_{ik} = \alpha_{ik} + \dfrac{\sum_{j=1}^{m_i} (\nu_{ij} - \alpha_{ij})}{m_i}$ (orjentisani pravac)

Ako imamo s spoljnih tačaka sa kojih je opažana tačka k i u unutrašnjih pravaca, odgovarajuće jednačine grešaka imaće izgled:

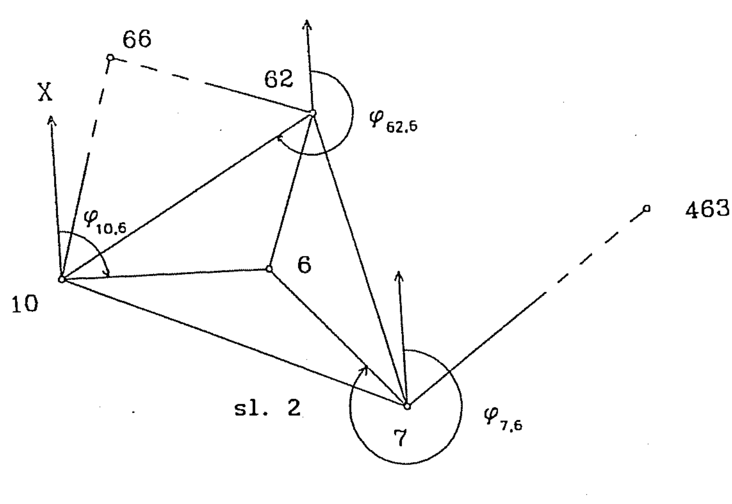
$$
\left.
\begin{array}{lr}
 & \text{težine} \\
v'_{1k} = a_{k1}\Delta X_k + b_{k1}\Delta Y_k + f_{1k} & m_1\,/(m_1+1) \\
v'_{2k} = a_{k2}\Delta X_k + b_{k2}\Delta Y_k + f_{2k} & m_2\,/(m_2+1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
v'_{sk} = a_{ks}\Delta X_k + b_{ks}\Delta Y_k + f_{sk} & m_s\,/(m_s+1) \\
v_{k1} = \left(a_{k1} - \dfrac{[a_k]}{u}\right)\Delta X_k + \left(b_{k1} - \dfrac{[b_k]}{u}\right)\Delta Y_k + f_{k1} - \dfrac{[f_k]}{u} & 1 \\
v_{k2} = \left(a_{k2} - \dfrac{[a_k]}{u}\right)\Delta X_k + \left(b_{k2} - \dfrac{[b_k]}{u}\right)\Delta Y_k + f_{k2} - \dfrac{[f_k]}{u} & 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
v_{ku} = \left(a_{ku} - \dfrac{[a_k]}{u}\right)\Delta X_k + \left(b_{ku} - \dfrac{[b_k]}{u}\right)\Delta Y_k + f_{ku} - \dfrac{[f_k]}{u} & 1
\end{array}
\right\} (2)
$$

Slobodni članovi f_{1k}, za spoljne pravce iznose: $f_{1k} = \nu^{o}_{1k} - \varphi_{1k}$

Za unutrašnje pravce f_{kl} iznose: $f_{kl} = \nu^{o}_{kl} - \alpha_{kl} - Z^{o}_{k}$.

Pomoću ovih jednačina grešaka dobiće se iste koordinate X_k i Y_k kao da su korišteni svi pravci, ali neće se dobiti ista ocjena tačnosti. Mada ovako dobijena ocjena tačnosti najčešće zadovoljava praktične porebe, ona nije zasnovana na čistom teorijskom principu, a ponekad može i da se bitno razlikuje kao što pokazuje slijedeći primjer:

3. PRIMJER IZRAVNANJA JEDNE TAČKE I NJENE OCJENE TAČNOSTI NA UOBIČAJEN I STROG NAČIN



sl. 2

Sračunati koordinate tačke 6 date na slici 2.

Mjereni pravci:

stanica 10	
Tačka	° ' "
66	02 52 51,7
62	50 42 30,0
6	71 09 26,6
7	101 06 25,4

stanica 62	
Tačka	° ' "
7	122 34 05,4
6	147 16 53,5
10	180 29 50,2
66	225 19 34,0

stanica 7	
Tačka	° ' "
62	00 00 10,0
463	50 03 35,6
10	288 19 43,2
6	336 32 13,6

stanica 6	
Tačka	° ' "
7	00 00 00,0
10	101 50 32,4
62	228 10 46,0

Date koordinate:

Tačka	X	Y
7	4355,192	4458,175
10	4767,076	3402,671
62	5383,966	4511,954
66	5639,630	3605,591
463	5205,576	5588,640

Približne koordinate tačke 6:

$$X_6^o = 4896,617$$
$$Y_6^o = 4256,022$$

Na osnovu mjerenih pravaca, datih i približnih koordinata prema jednačinama (2) formiraju se jednačine grešaka koje glase:

	Težine:
$v'_{7,6} = 124,9\ \Delta X + 334,6\ \Delta Y + 0,0 \ldots$	0,75
$v'_{10,6} = -236,4\ \Delta X + 35,9\ \Delta Y - 0,9 \ldots$	0,75
$v'_{62,6} = 174,2\ \Delta X - 331,7\ \Delta Y + 0,0 \ldots$	0,75
$v_{6,7} = 104,0\ \Delta X + 321,7\ \Delta Y - 1,4 \ldots$	1,00
$v_{6,10} = -\ 257,3\ \Delta X + 23,0\ \Delta Y - 0,9 \ldots$	1,00
$v_{6,62} = 153,3\ \Delta X - 344,6\ \Delta Y + 2,4 \ldots$	1.00

Nakon formiranja normalnih jednačina dobija se:

$$176893\ \Delta X - 43646\ \Delta Y + 613 = 0$$
$$-\ 43646\ \Delta X + 390222\ \Delta Y - 1322 = 0$$

Njihovo rješenje iznosi:

$$\Delta X = -\ 0,003 \text{ m} \qquad \Delta Y = 0,003 \text{ m}$$

pa su tražene (definitivne) koordinate:

$$X_6 = X_6^o + \Delta X = 4896,617 - 0,003 = 4896,614 \text{ m}$$

$$Y_6 = Y_6^o + \Delta Y = 4256,022 + 0,003 = 4256,025 \text{ m}$$

3.1. OCJENA TAČNOSTI NA UOBIČAJEN NAČIN

Pomoću jednačina (3) sračunaju se greške v' i v, kao što se to radi u praksi (10. i 11. obrazac):

$$v'_{7,6} = 0,6''; \qquad v'_{10,6} = -\ 0,1; \qquad v'_{62,6} = -\ 1,5;$$

$$v_{6,7} = -\ 0,8; \qquad v_{6,10} = -\ 0,1; \qquad v_{6,62} = 0,9.$$

$$[\ v'v'\ ] + [\ vv\ ] = 4,1079$$

Srednja greška pravca:

$$m = \sqrt{\frac{[v'v'] + [vv]}{s + u - 3}} = \sqrt{\frac{4,1079}{3+3-3}} = 1,17''$$

Srednje greške nepoznatih:

$$m_Y = \frac{1}{\sqrt{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}}} = 1,17\ \frac{1}{\sqrt{379453}} = 0,0019 \text{ m}$$

$$m_X = m_Y \sqrt{\frac{[\ bb\ ]}{[\ aa\ ]}} = 0,0019 \sqrt{\frac{390222}{176893}} = 0,0028 \text{ m}$$

4.2. STROGA OCJENA TAČNOSTI

Ovdje treba, prema slici 2, sračunati greške svih 15 pravaca, te pomoću njih izvršiti ocjenu tačnosti kao što to teorija posrednog izravnanja propisuje.

To znači greške v svih pravaca mogu se računati prema jednačinama (1):

i	ν_{ki} ° ' "	α_{ki} ° ' "	$\nu_{ki} - \alpha_{ki}$ ° ' "	$\alpha_{ki} + Z_{ki}$ ° ' "	v_{ki} "
			stanica 10		
66	13 05 30,9	02 52 51,7	10 12 39,2	13 05 31,7	-0,8
62	60 55 15,1	50 42 30,0	45,1	60 55 10,0	5,1
6	81 22 06,5	71 09 26,6	39,9	81 22 06,6	-0,1
7	111 19 01,1	101 06 25,4	35,7	111 19 05,4	-4,3
			159,9		-0,1
		Z_{10} =	10 12 40,0		
			stanica 62		
7	182 59 32,7	122 34 05,4	60 25 27,3		-1,4
6	207 42 21,1	147 16 53,5	27,6		-1,1
10	240 55 15,1	180 29 50,2	24,9		-3,8
66	285 45 09,1	225 19 34,0	35,1		6,4
			114,9		0,1
		Z_{62} =	60 25 28,7		
			stanica 7		
62	02 59 32,7	00 00 10,0	02 59 22,7	02 59 29,4	3,3
463	53 02 52,6	50 03 35,6	17,0	53 02 55,0	-2,4
10	291 19 01,1	288 19 43,2	17,9	291 19 02,6	-1,5
6	339 31 33,4	336 32 13,6	19,8	339 31 33,0	0,4
			77,4		-0,2
		Z_7 =	02 59 19,4		
			stanica 6		
7	159 31 33,4	00 00 00,0	159 31 33,4	159 31 34,2	-0,8
10	261 22 06,5	101 50 32,4	34,1	261 22 06,6	-0,1
62	27 42 21,1	228 10 46,0	35,1	27 42 20,2	0,9
			102,6		0,0
		Z_6 =	159 31 34,2		

Srednja greška pravca:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n - r}} = \sqrt{\frac{124,24}{15 - 6}} = 3,72''$$

Slika 2 pokazuje da imamo 15 mjerenja - pravaca i 6 traženih veličina: 2 koordinate i 4 orjentaciona ugla (Z_{10}, Z_{62}, Z_7 i Z_6), pa je broj prekobrojnih mjerenja 15 - 6 = 9.

Srednje greške nepoznatih:

$$m_Y = m \frac{1}{\sqrt{[bb\cdot 1]}} = 3,72 \frac{1}{\sqrt{379453}} = 0,0060 \text{ m}$$

$$\left([bb\cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} \right)$$

$$m_X = m_Y \sqrt{\frac{[bb]}{[aa]}} = 0,0060 \sqrt{\frac{390222}{176893}} = 0,0089 \text{ m}$$

4. ZAKLJUČAK

Primjer je namjerno izabran tako da pokaže da se stroga ocjena tačnosti može bitno razlikovati od ocjene koja se vrši u praksi.

Ovo će se rijetko desiti, ali nije isključeno. Pored toga, u praksi se uzimaju težine za spoljne pravce 1, pa se radi toga otežava rad na terenu, jer da bi težina bila približno 1 mora se pravac φ odrediti pomoću najmanje 3 tačke. U tom slučaju je

$$p_\varphi = 3 / 4 = 0,75 \approx 1.$$

S obzirom na nivo današnje računske tehnike nije nimalo teško izravnati pojedinačne triangulacione tačke i vršiti ocjenu tačnosti po strogim formulama. Ovo ima opravdanja tim više, što će u tom slučaju, često terenski rad biti manji. Uostalom sličnu situaciju imamo i kod izravnanja mreže pomoću Šrajberovih ekvivalentnih jednačina grešaka.

I ovdje se ocjena tačnosti vrši po strogim formulama, pomoću grešaka svih mjerenih pravaca.

LITERATURA

[1] Pašalić S.: Račun izravnavanja, Sarajevo 1989.
[2] Mihajlović K.: Geodezija II - I deo, Beograd 1974.