Smail Pašalić*

SREDNJA NORMIRANA GREŠKA I NJENA DIMENZIJA

REZIME. U radu se odgovara na kritiku naziva "srednja normirana greška", te tumači njena dimenzija, odnosno njena suština.

1. UVOD

U geodetskoj literaturi i praksi ima raznih tumačenja za srednju grešku mjerenja kome se pripisuje težina 1. Ova srednja greška obilježava se sa m_0 i tu nema neslaganja.

Neslaganje nastaje oko dimenzija i naziva ove srednje greške, a to znači dobrim dijelom i oko njene suštine.

U ovom radu autor iznosi svoje mišljenje i dokaze, odnosno opravdanja za odabiranje dimenzija i naziva za parametar m_0.

2. SREDNJA NORMIRANA GREŠKA

Poznato je da se težine mjerenja definišu na slijedeći način:

$$p_i = \frac{k}{m_i^2} \tag{1}$$

gdje je k proizvoljna konstanta.

Mjesto k može se proizvoljno usvojiti jedna od težina. U tom slučaju k se računa iz relacije (1), (nije proizvoljno).

Izaberimo neko mjerenje i za njega usvojimo težinu 1 (jedan). Srednju grešku koja odgovara ovako odabranom mjerenju nazivaćemo srednja normirana greška i obilježavati sa m_0.

Kao što se vidi parametar m_0 odnosi se na grešku mjerenja, a ne na grešku težine pa je zato odomaćeni izraz "srednja greška jedinice težine" neprikladan (ne odgovara prirodi parametra m_0).

Kada na ovako odabrano mjerenje primjenimo obrazac (1) dobijamo:

* Prof.dr SMAIL PAŠALIĆ, dipl.inž.geod.
Građevinski fakultet Sarajevo, Hasana Brkića 24

$$1 = \frac{k}{m_0^2} \tag{2}$$

Odavde je $k = m_0^2$, pa težine p_i, s obzirom na (1) iznose:

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2} \tag{3}$$

Odavde se dobija srednja normirana greška, odnosno srednja greška mjerenja koje ima težinu 1 (jedan):

$$m_0 = m_i \sqrt{p_i} \tag{4}$$

Neka imamo mjerenja x_i sa istinitim slučajnim greškama w_i i težinama p_i.

Koristeći relaciju (4) kao model, svešćemo (normiraćemo) greške mjerenja w_i različite tačnosti na greške mjerenja iste tačnosti koje imaju težinu 1 (jedan).

Ovako svedene, odnosno normirane greške označavaćemo sa w_i':

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= w_1 \sqrt{p_1} \\ w_2' &= w_2 \sqrt{p_2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n' &= w_n \sqrt{p_n} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Relaciju (4) imali smo pravo koristiti za dobijanje relacija (5), jer je logično da je odnos među greškama w_i isti kao i njima odgovarajućim srednjim greškama m_i.

Kako je poznato, srednja greška mjerenja iste tačnosti definiše se na sledeći način:

$$m = \sqrt{\frac{[ww]}{n}} \tag{6}$$

Pošto smo normiranjem greške mjerenja različite tačnosti w_i sveli na greške mjerenja iste tačnosti w_i' imamo pravo primjeniti definicionu formulu (6) na greške w_i', s tim da vodimo računa da se ove greške odnose na zamišljena mjerenja koja imaju težinu 1 (jedan).

Kao što smo rekli ovakvu srednju grešku označavaćemo sa m_0 i nazivati srednja normirana greška:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[w'w']}{n}} = \sqrt{\frac{[w\sqrt{p}\, w\sqrt{p}]}{n}} = \sqrt{\frac{[pww]}{n}} \tag{7}$$

Kao što pokazuju relacije (5) greške w'_i dobijene su normiranjem grešaka w_i na grešku mjerenja koje ima težinu jedan. A srednja normirana greška m_0 dobijena je prema definicionom obrascu za srednju grešku mjerenja iste tačnosti.

Prema tome otpada primjedba prof.dr Franje Brauma iznesena u [1], da srednja normirana greška nije normirana na određenu (poznatu) veličinu, pa je zato njen naziv neopravdan. Inače prof.dr F.Braum nije imao drugih primjedbi na naziv ove greške. Ovdje treba reći da je prof.dr F.Braum prvi osporio naziv "srednja greška jedinice težine", koja ne odgovara onome što prestavlja parametar m_0.

Da naziv normirane greške odgovara dobijenim greškama w'_i može poslužiti slijedeća analogija:

U matematičkoj statistici slučajna promjenljiva X ima standardnu devijaciju σ_x, koja može, zavisno od problema kojeg opisuje, imati različite vrijednosti.

Normiranjem (standardizacijom) promjenljivu X svodimo na promjenljivu T koja ima standardnu devijaciju $\sigma_t = 1$ (bez obzira na vrijednost σ_x).

Formula za normiranje glasi:

$$T = \frac{X - E(X)}{\sigma_x}$$

Isto tako greške mjerenja različite tačnosti w koje imaju različite težine p_w, normiranjem svodimo na greške mjerenja w' koje imaju težinu $p_{w'} = 1$ (bez obzira na vrijednost p_w).

Formula za normiranje glasi:

$$w' = w\sqrt{p_w}$$

Kao što se vidi naziv parametra m_0 "srednja normirana greška" je logičan i opravdan, jer je dobijen pomoću normiranih grešaka

w', na isti način kao što je i parametar m dobijen pomoću grešaka w, a koji nosi naziv "srednja greška" vidi formule (6) i (7).

3. DIMENZIJA SREDNJE NORMIRANE GREŠKE

Polazeći od uslova:

$$\frac{w_1^2}{m_1^2} + \frac{w_2^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{w_n^2}{m_n^2} = \text{minimum} \tag{8}$$

koji se dokazuje u teoriji grešaka, imamo pravo pisati:

$$k\left(\frac{w_1^2}{m_1^2} + \frac{w_2^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{w_n^2}{m_n^2}\right) = \text{minimum} \tag{9}$$

Ovaj k je pozitivna vrijednost, proizvoljna po veličini i dimenzijama.

Dokaz:

U uslovu (8) i (9) tražene veličine su w_i. One se moraju dobiti iste iz oba uslova, bez obzira na izbor konstante k. Ovo se vidi iz uslova (9), jer ako je izraz u zagradama (za određene nepoznate w_i) najmanji, onda je on najmanji (za iste te vrijednosti w_i) i kada ga pomnožimo sa ovako odabranom konstantom.

Za konstantu k mogli bi usvojiti bilo kakvu dimenziju i uvijek bi dobili iste w_i, odnosno ispravno rješenje. Međutim, iz praktičnih i logičnih razloga biramo da k ima dimenziju kvadrata srednje greške jedne vrste mjerenja. U protivnom dobićemo srednju normiranu grešku u nelogičnim dimenzijama, ili bez dimenzija što je opet nelogično, jer ne može mjerenje a sa time i njegova greška biti bez dimenzija.

Neka imamo više vrsta mjerenja, označimo ih sa a, b, c itd. Dimenzije njihovih srednjih grešaka označimo sa (m_a), (m_b), (m_c) itd. (zagrade "( )" označavaju dimenziju izraza u njima).

Za konstantu k odaberimo dimenziju (m_a). U tom slučaju, s obzirom na (1), dimenzije težina su:

$$(p_a) = \frac{(m_a)^2}{(m_a)^2} \; ; \; (p_b) = \frac{(m_a)^2}{(m_b)^2} \; ; \; (p_c) = \frac{(m_a)^2}{(m_c)^2} \quad \text{itd.} \tag{10}$$

Prema formulama (7) i (10) dimenzija za m_0 iznosi:

$$(m_0) = \sqrt{(w_a)^2 + \frac{(m_a)^2}{(m_b)^2}(w_b)^2 + \frac{(m_a)^2}{(m_c)^2}(w_c)^2 + \ldots} \tag{11}$$

Pošto su dimenzije (m_i) iste kao i dimenzije (w_i), dobijamo:

$$(m_0) = \sqrt{(w_a)^2 + \frac{(m_a)^2}{(m_b)^2}(w_b)^2 + \frac{(m_a)^2}{(m_c)^2}(w_c)^2 + \ldots} =$$

$$= \sqrt{(m_a)^2} = (m_a) \tag{12}$$

Dimenzije srednjih grešaka ostalih vrsta mjerenja, prema formulama (3), (11) i (12) su:

$$(m_i) = \frac{(m_0)}{\sqrt{(p_i)}} \; ;$$

$$(m_b) = \frac{(m_0)}{\sqrt{(p_b)}} = \frac{m_a}{\sqrt{(m_a)^2/\,(m_b)^2}} = (m_b);$$

$$(m_c) = \frac{(m_0)}{\sqrt{(p_c)}} = \frac{m_a}{\sqrt{(m_a)^2/\,(m_c)^2}} = (m_c) \quad \text{itd.}$$

4. ZAKLJUČAK

U radu je objašnjena suština srednje greške mjerenja kome je pripisana težina 1 (jedan) i to s obzirom na njen naziv i dimenziju.

Naziv je zaista kratak "srednja normirana greška i odražava tačno suštinu parametra m_0.

Dimenzija bi se mogla odabrati i drugačije, kao što se to u praksi nerijetko radi, ali onda m_0 dobija dimenziju van izvršenih mjerenja, što nije normalno ili ne dobija nikako dimenziju što opet nije normalno, jer mjerenja moraju biti izvršena u nekim dimenzijama pa onda i njihove greške moraju imati dimenzije.

LITERATURA

[1] Braum F.: Srednja pogreška jedinice težine, Geodetski list 10-12/1989, str.411

[2] Mihajlović K.: Geodezija II - I deo, Beograd, 1974.

[3] Pašalić S.: Račun izravnavanja, Sarajevo, 1989.

Eldin Donlagić *

MOGUĆNOST PRIMJENE AZIMUTALNIH METODA GEODETSKE ASTRONOMIJE ZA ODREĐIVANJE ELEMENATA EKSCENTRIČNOG SIGNALA TRIANGULACIONIH TAČAKA

REZIME. U radu se razmatra mogućnost primjene metoda geodetske astronomije za određivanje direkcionog ugla strane kada je otežano ili neizvodljivo računanje konvencionalnim načinom usljed nedogledanja tačaka.

1. UVOD

Prilikom progušćavanja postojeće trigonometrijske mreže (u svrhu premjera) triangulacionim ili tačkama nižeg reda, potrebnim za određivanje orijentacionih elemenata stereoparova aerofotogrametrijskog snimanja, vrlo često nailazimo na situaciju da data tačka na terenu egzistira, ali je praktično neupotrebljiva zbog nedogledanja sa susjednim tačkama.

Ovo nastaje iz dva razloga:

1. Što je tokom vremena vegetacija potpuno zatvorila nekada napravljene prosjeke ako je tačka prilikom određivanja imala i unutrašnje pravce i
2. Ako je tačka određena samo spoljašnjim pravcima na nekad postojeći signal, a zatim stabilizovana ispod, kakvih slučajeva je bilo u praksi.

Da bi se dobio direkcioni ugao strane "tačka - signal", potreban za računanje koordinata signala u prvom slučaju pribjegava se obnavljanju bar jedne od nekad postojećih prosjeka. Ovaj zahvat, pored utrošenog vremena koje zna biti znatno, prouzrokuje i veliku štetu šumskih kompleksa, dok u područjima nacionalnih parkova dolazi i u pitanje.

U drugom slučaju se uopšte ne može upotrijebiti, osim da se izvrši gradnja piramide ili nekog adekvatnog signala.

Radi prevazilaženja navedenog problema razmotrimo mogućnost određivanja direkcionog ugla strane metodama geodetske astronomije sa instrumentima i ostalom opremom koju geodetski stručnjak posjeduje na terenu.

* Sc ELDIN DONLAGIĆ, dipl.inž.geod.
Građevinski fakultet Sarajevo, Hasana Brkića 24

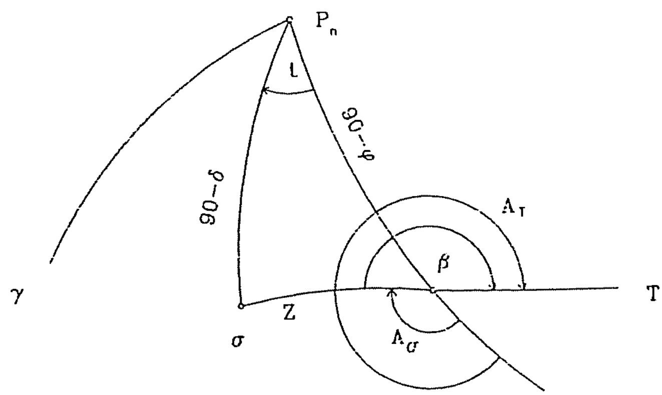
2. PRINCIP ODREĐIVANJA ASTRONOMSKOG AZIMUTA STRANE

Astronomski azimut strane (slika 1) računa se po:

$$A_T = A_\sigma + \beta \tag{1}$$

gdje je:

A_σ - astronomski azimut opažanog nebeskog tijela i
β - horizontalni ugao između nebeskog tijela i terestričkog signala.



sl. 1

Azimut nebeskog tijela računamo iz izraza:

$$\operatorname{tg} A_\sigma = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cdot \cos t - \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta} \tag{2}$$

gdje su:

t - časovni ugao posmatranog nebeskog tijela
φ - astronomska latituda stanice i
δ - deklinacija nebeskog tijela.

Pošto se većina geodetskih mjerenja vrši danju, to je, za određivanje astronomskog azimuta strane, svrsishodno vršiti opažanje Sunca.

Metodološki razlikujemo:

- određivanje azimuta po časovnom uglu Sunca i
- određivanje azimuta po visini Sunca.

3. ODREĐIVANJE AZIMUTA PO ČASOVNOM UGLU SUNCA

Za korištenje ove metode potrebno je da pored sekundnog teodolita opažač posjeduje ručni sat sa koga se mogu očitavati sekunde i tamni filtar na okularu ili objektivu za opažanje Sunca.

Poželjno je da se sat prije i poslije opažanja uporedi sa "tačnim vremenom" koje daju radio stanice svaki puni sat.

Časovni ugao Sunca t_0, računa se po:

$$t_0 = UT + E - \mu\Delta T - 12^h \tag{3}$$

gdje je: UT svjetsko vrijeme, a $E - \mu\Delta T = \eta$ tzv. vremensko izjednačenje. Za dalje računanje koriste se izrazi (1) i (2).

3.1. TAČNOST ODREĐIVANJA AZIMUTA PO ČASOVNOM UGLU SUNCA

Analiza tačnosti je pokazala da je najpovoljnije, sa naših širina, opažati Sunce kada su mu velika zenitska odstojanja, a to je ili rano ujutro ili kasno poslije podne. Na taj način se smanjuje uticaj grešaka u registraciji vremena i uticaj nagiba obrtne osovine.

Za smanjenje uticaja greške latitude, koja se očitava sa karte, najbolje je kombinovati jutarnja i popodnevna mjerenja.

Srednja greška azimuta jedne strane određenog iz jednog jutarnjeg i jednog popodnevnog girusa može se izračunati po:

$$m_A^2 = \frac{1}{8}\cos^2\varphi\,(tg\varphi - \cos A\cdot ctgZ)^2 m_t^2 + \frac{1}{8}(m_v^2 + m_i^2)ctgZ + \\ + \frac{1}{8}(m_v^2 + m_\beta^2) \tag{4}$$

gdje su:

m_t - srednja greška registrovanja vremena,

m_v - srednja greška viziranja Sunca,

m_i - srednja greška nagiba alhidadne osovine i

m_β - srednja greška mjerenog ugla β bez greške viziranja Sunca.

Uzimajući vrijednosti srednjih grešaka primjerene opremi i instrumentima kojima operator raspolaže dobićemo srednju grešku određenog azimuta upotrebom formule (4).

Ako uzmemo da je: $Z = 60^\circ$, $m_t = 4^s$, $m_v = 4''$, $m_i = 10''$, $m_\beta = 6''$, dobićemo: $m_A = 4,7''$

3.2. PROGRAM OPAŽANJA

Eliminisanje sistematskih instrumentalnih grešaka generisalo je opažački program koji se sastoji iz tzv. duplih girusa. Za lakši rad izrađen je zapisnik za opažanje iz koga se vidi tačan redosljed opažanja, kao i veličine koje je potrebno izmjeriti.

Na slici 2 prikazan je zapisnik za jedan dupli girus.

Astronomski obrazac br. 1E

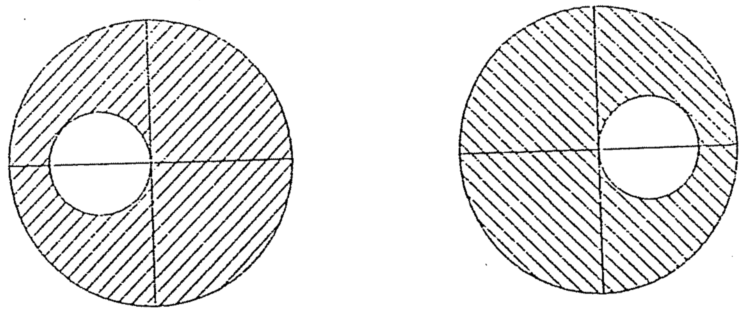
vizura pol. i.	pokazivanje sata h m s	hor. limb o ' " "	libela L R	primjedba
T KL				datum opaž.:
* KL				instrument:
* KL				
* KD				opažač:
* KD				
T KD				girus:
T KD				
* KD				p= mm Hg
* KD				t= °C
* KL				
* KL				
T KL				

sl. 2

Korišćene su sljedeće oznake:

- T - terestrički signal,
- * - nebesko tijelo,
- KL - prvi položaj durbina (krug lijevo),
- KD - drugi položaj durbina (krug desno),
- L - čitanje lijevog kraja alhidadne libele,
- D - čitanje desnog kraja alhidadne libele,
- p - pritisak izražen u mm Hg i
- t - temperatura izražena u °C.

Kako se obično ne raspolaže Roelofs prizmom Sunce se vizira tako što se vertikalnim koncem tangira lijeva, odnosno desna ivica (slika 3).



sl. 3. Obični način viziranja Sunca

Zbog ovakvog viziranja potrebno je dobijeni azimut svesti na centar Sunca pomoću redukcije:

$$\Delta A = \pm R \operatorname{cosec} Z \qquad (5)$$

gdje je R prividni radijus Sunca.

4. ODREĐIVANJE AZIMUTA PO VISINI SUNCA

I kod ove metode za računanje A_T koristi se relacija (1), dok se astronomski azimut Sunca računa po:

$$\cos A_{\odot} = \frac{\sin\delta_{\odot} - \sin\varphi\cdot\cos Z_{\odot}}{\cos\varphi\cdot\sin Z_{\odot}} \qquad (6)$$

gdje je:

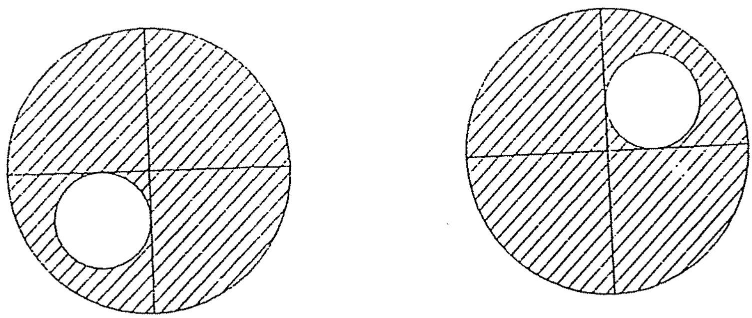
$$Z_{\odot} = Z'_{\odot} + \rho \qquad (7)$$

U (6) $Z'_{\odot}$ je mjereno zenitsko odstojanje Sunca a ρ je astronomska refrakcija koja je u funkciji temperature i pritiska.

Dakle, kod ove metode potrebno je jednovremeno mjeriti i zenitsko odstojanje i horizontalni pravac.

Međutim, za postizanje iste tačnosti kao kod metode određivanja azimuta po časovnom uglu, dovoljno je vrijeme registrovati sa tačnošću od 30^s, što je u nekim situacijama znatna prednost.

Postupak opažanja je sličan kao kod prethodne metode, a način viziranja na Sunce, kada ne raspolažemo Roelofs prizmom prikazan je na slici 4.



sl. 4. Obični način viziranja Sunca kada se mjeri i Z. odstojanje.

Prilikom obrade, opažanja se svode na centar Sunčeva diska i uvode ostale potrebne korekcije o kojima ovdje neće biti govora.

5. RAČUNANJE DIREKCIONOG UGLA

Prije svega, potrebno je sa astronomskog preći na geodetski azimut strane. Kao što je poznato između astronomskog i geodetskog azimuta jednog pravca postoji veza:

$$A = \alpha + \Delta\alpha \tag{8}$$

gdje su:

- A - astronomski azimut pravca
- α - geodetski azimut pravca
- $\Delta\alpha$ - Laplasova korekcija.

Računanje Laplasove korekcije u punom iznosu računa se po:

$$\Delta\alpha' = (\xi \cdot \sin\alpha - \eta \cdot \cos\alpha) \cdot \mathrm{ctg}Z + \eta \cdot \mathrm{tg}\varphi \tag{9}$$

gdje su:

- ξ - komponenta vertikalskog otklona u meridijanu,
- η - komponenta vertikalskog otklona u I vertikalu,
- Z - zenitsko odstojanje vizure pri određivanju astronomskog azimuta pravca i
- φ - astronomska latituda stanice.

Razlika između astronomskog i geodetskog azimuta pravca uslovljena je i greškama geodetskih i geodetsko - astronomskih određivanja, greškama pozicioniranja geodetskog horizontalnog datuma odnosno pozicioniranjem i orijentacijom referenc-elipsoida, ali najčešće vertikalskim otklonima.

Sa geodetskog azimuta na direkcioni ugao ν prelazimo koristeći relaciju:

$$\nu = \alpha - C \tag{10}$$

gdje je:

C konvergencija meridijana koja se računa na poznati način.

Kako se astronomski azimut računa od južne tačke, to je ovako izračunati direkcioni ugao potrebno promijeniti za 180°, te se onda može koristiti za računanje koordinata signala.

Tabela I daje položajnu grešku signala izraženu u centimetrima, a u funkciji dužine izražene u metrima i greške određivanja direkcionog ugla.

TABELA I

m_p \ d	20	40	60	100	150	200
30"	0,3	0,6	0,9	1,5	2,2	2,9
60"	0,6	1,2	1,7	2,9	4,3	5,8
90"	0,9	1,8	2,6	4,4	6,5	8,7

6. ZAKLJUČAK

Na osnovu izloženog može se zaključiti da navedene metode mogu sa dovoljnom tačnošću zamijeniti konvencionalni način određivanja koordinata signala, pa se može preporučiti primjena u praksi.

Kompletna obrada podataka vrši se odgovarajućim programom na računaru, a neposredni podaci koje daje operator su zapisnik opažanja u formi kakva je navedena u radu i koordinate Y i X stajališta.

Što se tiče visine signala ona se određuje uobičajenim načinom.

LITERATURA

[1] Ševarlić B., Milovanović V. Geodetska astronomija I Predavanja, Beograd 1989.

[2] Muminagić A. Viša geodezija II. Naučna knjiga, Beograd 1987

Mladen Lero [*]

SVOĐENJE MJERENIH DUŽINA SA FIZIČKE POVRŠINE ZEMLJE NA PROJEKCIONU RAVAN I UTICAJ NESVOĐENJA NA NEKE GEODETSKE RADOVE

SAŽETAK. U radu su date pripadne formule za svođenje mjerenih dužina sa fizičke površine Zemlje na ravan projekcije (Gauss - Krügerove), te se ukazuje da se taj sistematski uticaj ne može zanemariti ni kod geodetskih radova na mjerenju i dopuni poligonske mreže, kao i mnogim radovima iz oblasti inženjerske geodezije.

1. UVOD

Sva geodetska mjerenja obavljamo na fizičkoj površini Zemlje, a koordinate se računaju na usvojenom referenc - elipsoidu (kod nas Besselov) i u ravni projekcije (kod nas Gauss - Krügerova). Prema tome, sve mjerene veličine moramo svesti na matematički model gdje vršimo sama računanja. Kod osnovnih geodetskih radova to naročito dolazi do izražaja, ali se ne može zanemariti ni kod geodetskih radova na mjerenju i dopuni poligonske mreže, kao i mnogim radovima iz oblasti inženjerske geodezije, o čemu će biti govora u ovom radu.

2. SVOĐENJE MJERENIH DUŽINA SA FIZIČKE POVRŠINE ZEMLJE NA ELIPSOID

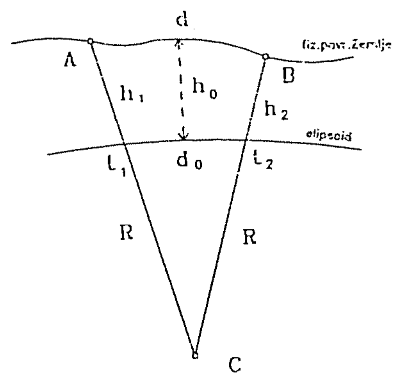
Dužine koje mjerimo na fizičkoj površini Zemlje moramo svesti na usvojeni elipsoid (u radovima niže geodezije to zamjenjujemo sa srednjim nivoom mora - geoidom). Treba odrediti razliku između dužine na elipsoidu i na fizičkoj površini Zemlje. Ta razlika zavisi o nadmorskim visinama tačaka dotične dužine. Možemo izračunati faktor m_h (Borčić 1976):

$$m_h = \frac{R}{R + h} \qquad (2.1)$$

[*] Mr MLADEN LERO, dipl.inž.geod.
Institut za saobraćaj Sarajevo

Prema slici 1. pojedine oznake imaju ova značenja:

d - horizontalna dužina na fizičkoj površini Zemlje,
d_0 - dužina na usvojenom elipsoidu,
h_0 - srednja nadmorska (apsolutna) visina dužine AB,
R - srednji poluprečnik Zemlje (elipsoida)



sl. 1

Kao što vidimo, faktor m_h određuje odnos između dužina na fizičkoj površini Zemlje i njima odgovarajućih dužina na površini usvojenog elipsoida. Dužinu na usvojenom elipsoidu dobijemo po formuli:

$$d_0 = m_h \cdot d \tag{2.2}$$

3. SVOĐENJE DUŽINA SA ELIPSOIDA NA PROJEKCIONU RAVAN

Kako je detaljno objašnjeno (Borčić 1976), računamo faktor m_h deformacije dužina pri prelasku sa elipsoida na ravninu Gauss - Krügerove projekcije po formuli:

$$m_p = m_0\left(1 + \frac{\bar{Y}^2}{2R^2} + \frac{\bar{Y}^4}{24R^4} + \ldots\right) \tag{3.1}$$

Oznake u ovoj formuli označavaju:

m_0 - linearni modul, $m_0 = 0,9999$ za Gauss-Krügerovu projekciju (3°)
$m_0 = 0,9996$ za Merkartorovu projekciju (6°)
(linearna deformacija na srednjem meridijanu),

$\bar{Y}$ - prave ravne pravougle koordinate u Gauss-Krügerovoj projekciji, a odnose se na udaljenost središnje tačke dužine, od srednjeg meridijana projekcije, R - poluprečnik elipsoida središnje tačke dužine.

Dužinu d_p na projekcionoj ravni dobit ćemo ako dužinu na elipsoidu pomnožimo s odgovarajućim faktorom m_p.

$$d_p = d_0 \cdot m_p \tag{3.2}$$

Ako je potrebno odrediti razliku između jedne dužine na fizičkoj površini Zemlje i dužine u ravni projekcije (karti), tada se treba poslužiti skupnim faktorom, koji će prvo odrediti razliku između dužine na fizičkoj površini Zemlje i dužine na elipsoidu, a zatim između dužine na elipsoidu i dužine u ravni projekcije. Taj skupni faktor m_s bit će jednak umnošku faktora m_p i m_h:

$$m_s = m_p \cdot m_h \tag{3.3}$$

Da bismo dobili dužinu na ravni projekcije, potrebno je dužinu na fizičkoj površini Zemlje pomnožiti sa skupnim faktorom m_s:

$$d_p = d \cdot m_s \tag{3.4}$$

Da bismo dobili dužine na fizičkoj površini Zemlje, potrebno je dužine izračunate iz koordinata tačaka koje su izražene u Gauss-Krügerovoj projekciji, polazeći od Besselovog elipsoida podijeliti sa faktorom m_s za odgovarajuću udaljenost od srednjeg meridijana i odgovarajuću srednju nadmorsku visinu.

Uz pomoć prikladnog računara i prethodno napravljenog programa ova svođenja je vrlo jednostavno obavljati bez obzira na koji se elipsoid i projekcionu ravan odnosi.

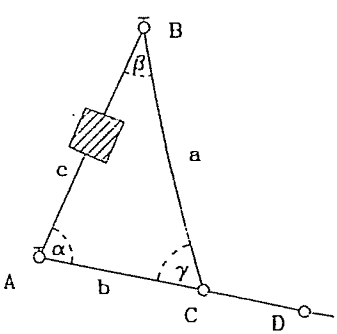
4. UTICAJ NESVOĐENJA NA NEKE GEODETSKE RADOVE

Nije potrebno posebno isticati i obrazlagati potrebu svođenja mjerenih dužina sa fizičke površine Zemlje na projekcionu ravan kod radova trigonometrijske mreže uz primjenu trilateracije, pa i na radovima poligonometrijske mreže svih redova, nego ćemo ukazati na ozbiljnost u pojedinim primjerima niže geodezije i inženjerske geodezije.

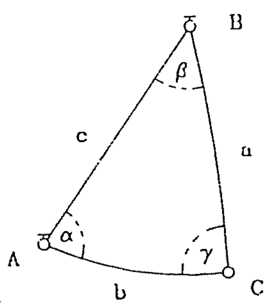
1. primjer

Prema slici 2a imamo slučaj da polazi poligonski vlak sa poligonometrijske tačke A i orijentacijom na poligonometrijsku tačku B koja se zbog naknadno izgrađene kuće ne dogleda, a nema mogućnosti vizirati na neku drugu orijentaciju. U današnje vrijeme, kada imamo elektrooptičke daljinomjere, a ponekada i nesavjesno prikupljene podatke sa terena, pa nemamo prekobrojnih mjerenja, a uz to ni pouzdanost prikupljenih podataka na terenu, izmjerili smo samo dužine a i b. Ukoliko se tačke A i B nalaze na nadmorskoj visini H = 1500m i da su tačke uz ishodišni meridijan gdje je deformacija mjerila najveća. U tom slučaju su dužine:

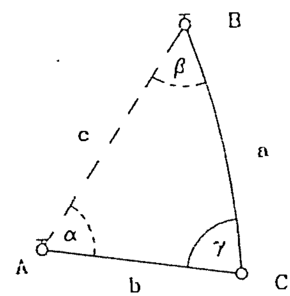
a	b	c	
350,000	200,000	300,000	na fizičkoj površini Zemlje
349,918	199,953	299,929	na nultoj nivo plohi (elipsoidu)
349,883	199,933	299,899	na projekcionoj ravni (Gauss-Krüger).



sl. 2a



sl. 2b



sl. 2c

Ako pristupimo računanju ostalih elemenata u trouglu prema slikama 2a, 2b i 2c dobićemo rezultate:

2a

dato:	sračunato:
a = 350,00	α = 86°26'40,08"
b = 200,00	β = 34°46'23,33"
c = 299,899	γ = 58°46'56,59"

2b

dato:	sračunato:
a = 350,00	α = 86°25'00,04"
b = 200,00	β = 34°46'19,00"
c = 300,00	γ = 58°48'40,96"

2c

dato:	sračunato:
a = 350,00	α = 86°25'00,04"
b = 200,00	β = 34°46'19,00"
γ = 58°48'40,96"	c = 300,000

Prema slici 2a kada smo uzeli u računanje mjerene dužine a i b koje se odnose na fizičku površinu Zemlje, te dužinu c dobivenu iz koordinata poznatih tačaka i zanemarili prelaz sa projekcije na fizičku površinu, dobivamo da je vezni ugao α na tački A veći za 1'40"od stvarnog ugla računatog prema slici 2b, gdje su sve dužine na fizičkoj površini Zemlje.

Računanje prema slici 2c gdje su na fizičkoj površini Zemlje izmjerene dužine a i b i ugao β, pa sa tim veličinama sračunali ostale elemente, dobivamo iste vrijednosti kao rezultate prema slici 2b, što je i razumljivo.

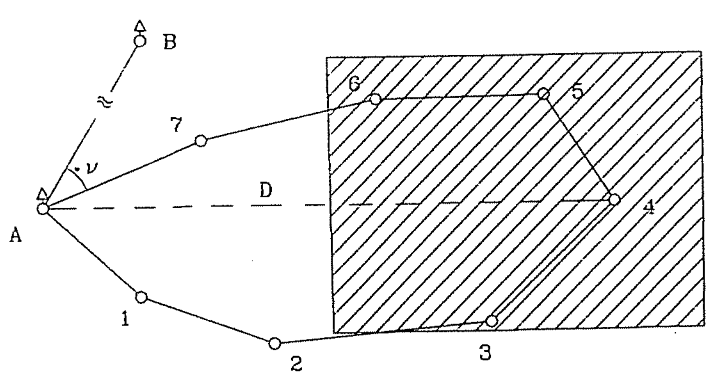
2. primjer

Ako bi iz predhodnog primjera računali koordinate tačke C lučnim presjekom, što je čest slučaj, ne treba posebno dokazivati da se koordinate ne mogu računati prije nego što se dužine a i b ne svedu sa fizičke površine Zemlje na projekcionu ravan.

3. primjer

Ako pretpostavimo iz 1. primjera da se tačke A i B dogledaju, a treba da na terenu iskolčimo tačku C čije koordinate poznajemo. Ukoliko tačku C iskolčimo polarno sa tačke A ili B, uglom i dužinom, tada moramo dužine a i b sračunati sa vrijednostima na fizičkoj površini Zemlje, pa tek onda pristupiti iskolčavanju pomoću tih dužina.

4. primjer



sl. 3

Prema slici 3. imamo slučaj da smo prinuđeni na terenima gdje je triangulaciona mreža rijetka, a imamo potrebu projektovanja nekog kompleksa. Na tom lokalitetu od triangulacione tačke A sa orijentacijom na triangulacionu tačku B razvijamo zatvoreni poligonski vlak od sedam tačaka u kojoj je tačka o4 najudaljenija od priključne tačke vlaka sa koje se iskolčavaju objekti cijelog kompleksa. U ovom slučaju je neminovno izvršiti svođenje dužina u poligonskom vlaku sa fizičke površine Zemlje na projekcionu ravan, jer bi u protivnom koordinate tačke o4 bile opterećene najvećom greškom što ovisi od dužine dijagonale vlaka D.

5. primjer

Često imamo slučajeva da na terenima gdje imamo rijetku geodetsku osnovu, a teren nije obrastao i dosta je pregledan, da se opredijelimo uz pomoć elektrooptičkog daljinomjera i pristupimo snimanju ili iskolčavanju dugim vizurama.

U tom slučaju ne smijemo zaboraviti pri računanju koordinata snimljenih tačaka ili iskolčavanju iz koordinata pojedinih tačaka na prelaz sa terena na projekcionu ravan i obrnuto. U svemu ovome će nam olakšati prikladni računari sa predhodno napravljenim odgovarajućim programima.

Prilikom iskolčavanja neke saobraćajnice iz projektovanih koordinata elemenata trase, moramo imati na umu da trasu prenosimo na fizičku površinu Zemlje i da trasa treba da bude u potpunom matematičkom odnosu i da se ne mogu preklapati krivine koje su bez međupravaca, a to će nam se desiti ako ne uvažavamo izloženu problematiku. Pored toga i sama stacionaža se odnosi na trasu koja je na fizičkoj površini Zemlje, a ne na projekcionoj ravni, gdje su koordinate.

5. ZAKLJUČCI

Na osnovu svega izloženog može se zaključiti da sva mjerenja dužina koja obavljamo na fizičkoj površini Zemlje moramo svoditi na model projekcione ravni gdje se i vrše računanja. Isto tako, u obrnutom postupku, kada se prenose (iskolčavaju) pojedine dužine dobivene iz koordinata projekcione ravni, potrebno ih je korigovati i tako doći do njihove prave veličine na samom terenu.

Ovaj sistematski uticaj u nekim geodetskim radovima je više, a u nekim manje izražen, što ovisi od tražene tačnosti pojedinih rezultata mjerenja.

LITERATURA

[1] Borčić, B. (1976): Gauss - Krügerova projekcija meridijanskih zona, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb 1976.