

Mensur Omerbašić *

UDK 528.2
Originalni naučni rad

2D Riemann-Christoffel tenzor Γ_{ij}^k zakrivljenosti prostora iz 3D prostora korištenjem specijalizirane permutacijske scheme

Uvod

Izvedimo metrički tenzor za geodetske koordinate (h, φ, λ) na fiksnom rotacionom elipsoidu zadatom svojim dvjema osama (a, b) , i centrisanom u koordinatnom ishodištu za koje vrijedi $x^1 = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda$, $x^2 = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda$, $x^3 = (N+h)\sin\varphi$, kao [Hotine, 1969]

$$g_{ps} = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} \frac{\partial x^j}{\partial u^s} \quad (1)$$

gdje $N = a\sqrt{\cos^2\varphi + (b/a)^2\sin^2\varphi}$, a $u^i \in U$ su krivolinijske koordinate u krivolinijskom koordinatnom sistemu U , na pr., h, φ, λ na rotacionom elipsoidu. Onda iz (1) slijedi:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \cos^2\varphi\cos^2\lambda + \cos^2\varphi\sin^2\lambda + \sin^2\varphi = 1 \\ g_{22} &= \frac{b^4}{a^8}N^6\sin^2\varphi\cos^2\lambda + \frac{b^4}{a^8}N^6\sin^2\varphi\sin^2\lambda + \frac{b^4}{a^8}N^6\cos^2\varphi = \frac{b^4}{a^8}N^6 \\ g_{33} &= (N+h)^2\cos^2\varphi\sin^2\lambda + (N+h)^2\cos^2\varphi\cos^2\lambda + 0 = (N+h)^2\cos^2\varphi \\ &\text{or for } h=0: \quad \dots = N^2\cos^2\varphi = p^2 \quad \forall p \neq s \Rightarrow g_{ps} = 0 \end{aligned} \right\}, (2)$$

a sâm metrik je:

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (M+h)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (N+h)^2\cos^2\varphi \end{vmatrix}. \quad (3)$$

* Dr. Mensur Omerbašić, dipl. inž. geod., GTS d.o. Sarajevo,
e-mail: omerbashich@gts.ba

Christoffelovi simboli 1^{ve} i 2^{ge} vrste respektivno dati su sa [Wrede, 1963]:

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right), \quad \Gamma_{ij}^k = g^{lk} \cdot [ij, k], \quad (4)$$

što za rotacioni elipsoid u geodetskim koordinatama $(x^1, x^2, x^3) \equiv (h, \varphi, \lambda)$, glasi:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = g^{33} \cdot [23, 3] &= \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot (-MN \sin \varphi \cos \varphi) = -\frac{M}{N} \tan \varphi \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = g^{33} \cdot [13, 3] &= \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot N \cos^2 \varphi = \frac{1}{N} \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = g^{22} \cdot [12, 2] &= \frac{1}{M^2} \cdot M = \frac{1}{M} \\ \Gamma_{22}^2 = g^{22} \cdot [22, 2] &= \frac{1}{M^2} \cdot 3M^2 \left(1 - \frac{M}{N}\right) \tan \varphi = 3 \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \tan \varphi \\ \Gamma_{22}^1 = g^{11} \cdot [22, 1] &= \frac{1}{1} \cdot (-M) = -M \\ \Gamma_{33}^1 = g^{11} \cdot [33, 1] &= \frac{1}{1} \cdot (-N \cos^2 \varphi) = -N \cos^2 \varphi \\ \Gamma_{33}^2 = g^{22} \cdot [33, 2] &= \frac{1}{M^2} \cdot MN \sin \varphi \cos \varphi = \frac{N}{M} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (5)$$

Zahvaljujući opštosti tenzorâ, u cilju dokazivanja prikladnosti takvog prostora za razmatranja u okviru Euklidovskog prostora, dovoljno je u izložiti takav prostor istom ograničenju koji vrijedi za Euklidovske prostore: tamo, vektorsko polje dobijeno paralelnim transportom plošnog vektora duž krive – geodetske linije (u tom slučaju pravac!), i zadane sa [Spiegel, 1959]:

$$\frac{\partial A^r}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^r A^j = 0 \quad (6)$$

odsijeca uvijek jednake uglove sa geodetskom linijom (pravcem), i samo prateći pravu liniju.

Koncept paralelizma u Riemannovskim prostorima definiran je relativno zadatoj krivoj. Na rotacionom elipsoidu kao jednom takvom prostoru, uvijek postoji najmanje jedna geodetska linija koja spaja dvije date tačke. Tako za tangent vektore φ -krivoj za $\lambda = \lambda_1 = \text{const.}$, te φ -krivoj za $\lambda = \lambda_2 = \text{const.}$, bez obzira na (ne)postojanje paralelizma u Euklidovskom smislu, govorimo o paralelizmu ako se desio paralelni transport između takva dva vektora, tj., ako je gornja j-na (6) zadovoljena. Ovo je očigledno slučaj u nekom Euklidovskom prostoru gdje svi Christoffelovi simboli nužno nestaju i gdje su svi preostali izvodi pravaca jednaki nuli: meridijani su međusobno paralelni u transverzalnim kartografskim projekcijama.

Da bismo vidjeli da li su gore navedeni tangent vektori i generalno međusobno paralelni na rotacionom elipsoidu, dovoljno je pokazati da barem jedna iz sistema jednačina (6) ne zadovoljava za (5):

Izvođenje Riemann-Christoffel tenzora zakrivljenosti prostora

$$\frac{\partial A^3}{\partial x^3} + \Gamma_{23}^3 \cdot A^2 = \frac{\partial}{\partial \lambda} (0) - \frac{M}{N} \tan \varphi \cdot M^2 = -\frac{M^3}{N} \tan \varphi \neq 0 \text{ except for } \varphi = 0 \wedge \varphi = \pi. \quad (7)$$

Riemann-Christoffel tenzor zakrivljenosti prostora glasi [Wrede, 1963]:

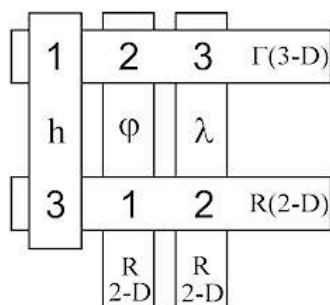
$$R_{ijk}^1 = \frac{\partial \Gamma_{ik}^1}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^1 - \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^1, \quad (8)$$

dok je njegov kovarijantni oblik definiran kao:

$$R_{lijk} = g_{ls} R_{ijk}^{ks}. \quad (9)$$

Jedine četiri komponente ovog tenzora različite od nule u 2D simetričnom prostoru jesu R_{1212} , R_{2121} , R_{1221} , R_{2112} , gdje usljed simetrije u dvjema parovima indeksâ, kao i usljed anti-simetrije, vrijedi: $R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$ [Wrede, 1963].

Sfera i rotacioni elipsoid predstavljaju 2D zakrivljene prostore (površni). U prethodnim razmatranjima (vidjeti i Dodatak) smo za Christoffelove simbole koristili 3D koordinate. Stoga ćemo sada za računanje tenzora zakrivljenosti koristiti sljedeću shemu za permutaciju indeksâ Christoffelovih simbolâ 2^{ge} vrste i odgovarajućih elemenata Riemann-Christoffel tenzorâ:



Gornja shema koristi se tako da se njeni kolone i redovi unakrsno upoređuju da bi se pronašli indeksi međusobno odgovarajući u 2D odnosno 3D prostoru. Za rotacioni elipsoid, komponente Riemann-Christoffel tenzora zakrivljenosti (tog) prostora, prema izrazu (8), glase:

$$\begin{aligned}
R_{212}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_{32}^2}{\partial \lambda} + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{N}{M} \sin \varphi \cos \varphi \right) - 0 + \frac{N}{M} \sin \varphi \cos \varphi \cdot 3 \left(1 - \frac{M}{N} \right) \tan \varphi + \frac{M}{N} \tan \varphi \cdot \frac{N}{M} \sin \varphi \cos \varphi = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{N}{M} \sin 2\varphi \right) + 3 \frac{N}{M} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - 3 \frac{N}{M} \cdot \frac{M}{N} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \sin^2 \varphi = \\
&= \frac{1}{2} \left[-2 \left(\frac{N}{M} - 1 \right) \tan \varphi \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{N}{M} \cdot 2 \cos 2\varphi \right] + 3 \frac{N}{M} \sin^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \\
&= -2 \left(\frac{N}{M} - 1 \right) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{N}{M} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 3 \frac{N}{M} \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi = \\
&= -2 \frac{N}{M} \sin^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi + \frac{N}{M} \cos^2 \varphi - \frac{N}{M} \sin^2 \varphi + 3 \frac{N}{M} \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi = \\
&= \frac{N}{M} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \Rightarrow \\
R_{212}^1 &= \frac{N}{M} \cos^2 \varphi. \tag{10}
\end{aligned}$$

Računanje druge tri komponente ostavljamo čitaocu. Kovarijantne komponente sada se sračunaju iz (9) i (10):

$$R_{1212} = g_{11} \cdot R_{212}^1 = MN \cos^2 \varphi, \tag{11}$$

što je u saglasnosti s diskusijom koja je uslijedila neposredno nakon j-ne (9).

Radi kompletnosti zadatka, još izvedimo i Ricci-Einstein te Lamé tenzore, $R_{ij} = g^{mn} R_{mijn}$ i $S^{ij} = e^{ikl} e^{jmn} R_{klmn}$ [Borisenko & Tarapov, 1966] respektivno, za rotacioni elipsoid (vidjeti Dodatak):

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} -\frac{M}{N} & 0 \\ 0 & -\frac{N}{M} \cos^2 \varphi \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Takođe:

$$S^{11} = \frac{-1}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{g}} R_{1212} = -\frac{1}{g} R_{1212} = -\frac{MN \cos^2 \varphi}{M^2 N^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{1}{MN}, \tag{13}$$

gdje [Wrede, 1963]:

$$e^{ikl} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{ikl} \wedge e^{jmn} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{jmn}, \text{ and } S^{ij} = S^{ji}. \quad (14)$$

Preostale komponente dobiju se na analogan način, te stoga njihovo izvođenje ostavljamo čitaocu. Primjenom formule za Gaussovu krivinu, iz Riemann-Christoffel tenzora zakrivljenosti $K = (1/g) R_{1212}$ [Sokolnikoff, 1964] za rotacioni elipsoid, dobijemo:

$$K_{\text{Elipsoid}} = \frac{1}{M^2 N^2 \cos^2 \varphi} \cdot MN \cos^2 \varphi = \frac{1}{MN} \quad (15)$$

Zaključak

Ovdje smo pokazali brži način za dobijanje 2D Riemann-Christoffel tenzora zakrivljenosti prostora. Ispravnost izraza (15), dobijenog iz formule za Gaussovu krivinu, u saglasnosti je sa (v) iz Dodatka. Naša schema omogućuje direktnu transformaciju u Euklidovski prostor, tj., iz proizvoljnog (ovdje ravnog, ali lahko primjenljivog na opšti slučaj) 3D u 2D prostor koji uključuje i rotacioni elipsoid. Moguće su daljnje razrade, na pr., za površi parametrizirane Gaussovima normalnim plošnim koordinatama $(\varphi_{el}, \lambda_{el}, h_{el}(\varphi_{el}, \lambda_{el}))$, kao što je planeta Zemlja. Tako bi, na pr., korištenjem naše scheme Riemann-Christoffel tenzor zakrivljenosti mogao biti direktno računat za topografsku površ $h_{el}(\varphi_{el}, \lambda_{el})$ Zemlje, pri čemu bi Christoffelovi simboli za takvu reprezentaciju bili zadati u obliku ortonormalnih funkcija na rotacionom elipsoidu.

Dodatak

Neki korisni izrazi:

$$M = N^3 \frac{b^2}{a^4}; \quad \frac{\partial M}{\partial \varphi} = 3M \left(1 - \frac{M}{N}\right) \tan \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{M}{N}\right) = 2 \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \tan \varphi; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{N}{M}\right) = -2 \left(\frac{N}{M} - 1\right) \tan \varphi. \quad (i)$$

Izrazi (4) dobijeni su nakon izvršenih sljedećih računanja:

$$\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = -\frac{b^2}{a^4} N^3 \sin \varphi \cos \lambda$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = -\frac{b^2}{a^4} N^3 \sin \varphi \sin \lambda \quad (ii)$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = \frac{b^2}{a^4} p N^2 = \frac{b^2}{a^4} N^4 \cos^2 \varphi.$$

U gornjem smo našli totalne izvode za $N = f(\varphi)$. Pomenimo još da se do metrika može doći na više načina; mi smo koristili dobro poznati [Hotine, 1969]:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N \cos \varphi) = -M \sin \varphi \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (N \sin \varphi) = \frac{N - M}{\cos \varphi} + M \cos \varphi, \quad (\text{iii})$$

gdje (i) može služiti kao dokaz ispravnosti rezultata dobijenog na bilo koji od dva načina.

Računanjem izrazâ (10) dobijemo Christoffelove simbole prve vrste (pokazujemo samo one različite od nule), za 3D prostor dat u geodetskim koordinatama, relativno u odnosu na elipsoid $h = 0$:

$$[32,3] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathbf{g}_{32}}{\partial x^3} \right] = 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N^2 \cos^2 \varphi) - 0 = -MN \sin \varphi \cos \varphi$$

$$[13,3] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{g}_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial \mathbf{g}_{13}}{\partial x^3} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} (N^2 \cos^2 \varphi) + 0 - 0 = N \cos^2 \varphi$$

$$[12,2] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} (M^2) + 0 - 0 = M$$

$$[22,2] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (M^2) = 3M^2 \left(1 - \frac{M}{N} \right) \tan \varphi$$

$$[22,1] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{g}_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^1} \right] = 0 + 0 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} (M^2) = -M$$

$$[33,1] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{g}_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^1} \right] = 0 + 0 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} (N^2 \cos^2 \varphi) = -N \cos^2 \varphi$$

$$[33,2] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{g}_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^2} \right] = 0 + 0 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N^2 \cos^2 \varphi) = MN \sin \varphi \cos \varphi$$

$$[23,3] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{g}_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial \mathbf{g}_{23}}{\partial x^3} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N^2 \cos^2 \varphi) + 0 - 0 = -MN \sin \varphi \cos \varphi$$

$$[31,3] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{g}_{31}}{\partial x^3} \right] = 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} (N^2 \cos^2 \varphi) - 0 = N \cos^2 \varphi$$

$$[21,2] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{g}_{21}}{\partial x^2} \right] = 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} (M^2) - 0 = M.$$

(iv)

Iz (4) očito je da jedino za

$$[ij, k] \neq 0 \Rightarrow \Gamma_{ij}^k \neq 0.$$

Zakrivljenost nekog elipsoida sračunata je korištenjem gornjih izraza, kao:

$$\begin{aligned}
 K_{\text{Elipsoid}} &= -\frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \lambda} \right) \right] = \\
 &= -\frac{1}{2 \cdot \frac{b^2}{a^4} N^3 p} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\frac{b^2}{a^4} N^3 p} \cdot \frac{\partial(p^2)}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\frac{b^2}{a^4} N^3 p} \cdot \frac{\partial M^2}{\partial \lambda} \right) \right] = \\
 &= -\frac{1}{2 \cdot \frac{b^2}{a^4} N^3 p} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2a^4 p}{b^2 N^3 p} \cdot \frac{d p}{d \varphi} \right) = \frac{-a^4}{2b^2 N^3 p} \cdot \frac{2a^4}{b^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{N^3} \cdot \frac{-b^2}{a^4} N^3 \sin \varphi \right) = \\
 &= \frac{a^8}{b^4 N^3 p} \cdot \frac{b^2}{a^4} \cos \varphi = \frac{a^4}{b^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{N^4 \cos \varphi} = \frac{a^4}{b^2 N^4} = \frac{1}{MN}. \tag{v}
 \end{aligned}$$

Literatura:

- Borisenko, A.I., Tarapov, I.E. (1966). *Vector and Tensor Analysis with applications*. Translated from Russian by Prentice-Hall, Inc. (1968). New Jersey, N.J., the United States of America.
- Hotine, M. (1969). *Mathematical Geodesy*. U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., United States of America.
- Sokolnikoff, I. S. (1964). *Tensor Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., the United States of America.
- Spiegel, M.R. (1959). *Theory and Problems of Vector Analysis and an introduction to Tensor Analysis*. Schaum's outline series, Schaum Publishing Co., New York, United States of America.
- Wrede, R.C. (1963). *Introduction to Vector and Tensor Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., United States of America.

Sažetak:

Kada prostor u kojem su Christoffelovi simboli druge vrste simetrični u donjim indeksima postoji, takav prostor onda čini alternativu standardnoj proceduri $(h, \varphi, \lambda) \rightarrow (r, \theta, \lambda)$ gdje se 2D površ normalno inducira iz geometrije okolnog 3D prostora kojim je površ obuhvaćena. U takvoj situaciji čini se prikladnim koristiti naročitu shemu za neposrednu permutaciju indeksa Γ^k_{ij} tenzora. Takav prostor omogućuje transformaciju u cilju dobijanja komponenti 2D Riemann-Christoffel tenzora ovdje izraženog u geodetskim koordinatama za rotacioni elipsoid, od koristi u geofizici. Primjenom naše sheme nađemo korespondirajuće indekse u 2D i u 3D suplement-prostoru, i sračunamo komponente

Riemann-Christoffel tenzora zakrivljenosti prostora. Tako operiranjem nad elementima samih projekcija dobijemo opšte-poznatu vrijednost od $1/MN$ za Gausovu krivinu na rotacionom elipsoidu. Da bi dokazali validnost scheme, pokažemo i da je u takvom jednom 3D prostoru tangent vektor ϕ -krive za $\lambda=\text{const}_1$ zaista paralelan tangent vektoru ϕ -krive za $\lambda=\text{const}_2$, na površini rotacionog elipsoida. U poređenju s klasičnim pristupom, naša schema omogućuje brža računanja 2D tenzora zakrivljenosti, i kao takva čini preferirani način računanja Riemann-Christoffel tenzora zakrivljenosti prostora, na pr., topografske površi $h_{el}(\varphi_{el}, \lambda_{el})$ planete Zemlje.

2D Riemann-Christoffel curvature tensor via a 3D space using a specialized permutation scheme

Abstract:

When a space in which Christoffel symbols of the second kind are symmetrical in the lower indices exists it constitutes a supplement to the standard procedure $(h, \varphi, \lambda) \rightarrow (r, \theta, \lambda)$ when a 2D surface is normally induced from the geometry of the surrounding 3D space in which the surface is embedded. There it appears appropriate to use a suitable scheme for the straightforward permutation of indices of Γ_{ij}^k , when such a space would make this transformation possible so to obtain the components of the 2D Riemann-Christoffel tensor here expressed in geodetic coordinates for an ellipsoid of revolution, of use in geophysics. By applying the scheme we find the corresponding indices in a 2-D and a 3-D supplement-space and compute the components of the Riemann-Christoffel tensor. By operating over the elements of the projections alone, the all-known value of $1/MN$ for the Gaussian curvature on an ellipsoid of revolution is obtained. To prove the validity of the scheme, we show that in such a 3D space the tangent vector to a ϕ -curve for $\lambda=\text{const}_1$ would be parallel to a tangent vector to a ϕ -curve for $\lambda=\text{const}_2$ on the surface of an ellipsoid of revolution. Compared to the classical approach, our scheme enables faster computation of the 2D curvature tensor, and as such makes a preferred way for computing the Riemann-Christoffel curvature tensor for the topographic surface $h_{el}(\varphi_{el}, \lambda_{el})$ of the Earth.