

Primljeno / Received: 08.09.2017.
Prihvaćeno / Accepted: 06.11.2017.

UDK 528.232.2
Stručni rad / Professional article

UDALJENOSTI IZMEĐU KRAJNJIH TAČAKA BOSNE I HERCEGOVINE

DISTANCES BETWEEN ENDPOINTS OF BOSNIA AND HERZEGOVINA

Edin Hadžimustafić

SAŽETAK

Predmet istraživanja ovog rada je izračunavanje udaljenosti između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine. Cilj istraživanja je provjera tačnosti podataka koji su u zvaničnoj upotrebi. Određivanje astronomsko-geografskog položaja Bosne i Hercegovine, izračunavanje dužina lukova meridijana i paralela aproksimirajući Zemlju elipsoidom i loptom, komparacija dobivenih vrijednosti, predstavljaju zadatke istraživanja. Osnovna hipoteza je da zvanični podaci o udaljenostima između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine nisu tačni i da se trebaju korigovati. U radu su primijenjeni matematičko-kartografski i analitičko-sintetički metod. Dobiveni rezultati poslužit će u kartografskim, geografskim, geodetskim i drugim srodnim naučnim disciplinama.

Ključne riječi: *krajnje tačke Bosne i Hercegovine, astronomsko-geografski položaj, Zemljin elipsoid, matematička kartografija.*

ABSTRACT

The subject of this paper is to calculate the distances between the endpoints of Bosnia and Herzegovina. The aim of the research is to verify the accuracy of data that is in official use. Determining the astronomical-geographic position of Bosnia and Herzegovina, calculating the length of the meridians and parallels arcs approximating the Earth with an ellipsoid and also with sphere, a comparison of the obtained values, are the tasks of the research. The basic hypothesis is that official data about the distances between the endpoints of Bosnia and Herzegovina are not accurate and should be corrected. In this paper mathematical-cartographic and analytical-synthetic methods have been applied. The results obtained should be used in cartographic, geographical, geodetic and other related scientific disciplines.

Key words: *endpoints of Bosnia and Herzegovina, astronomical-geographical position, Earth's ellipsoid, mathematical cartography.*

1 UVOD

Bosna i Hercegovina se nalazi na sjevernoj Zemljinoj hemisferi. Prema Federalnom zavodu za ... (2015), krajnja sjeverna tačka Bosne i Hercegovine nalazi se na paraleli $\varphi = 45^{\circ}16'30''$ N, na sjeveru općine Bosanska Dubica. Najjužnija tačka leži na paraleli $\varphi = 42^{\circ}33'00''$ N, na jugu općine Trebinje. Krajnja istočna tačka Bosne i Hercegovine nalazi se na meridijanu $\lambda = 19^{\circ}37'41''$ E, na istoku općine Bratunac, dok krajnja zapadna tačka leži na $\lambda = 15^{\circ}44'00''$ E, u

zapadnom dijelu općine Bihać¹. Koordinate krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine date su u položajnom terestričkom referentnom sistemu – BHDKS. Geografski položaj koordinata krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine prikazan je na Slici 1.



Slika 1. Geografski položaj koordinata krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine

Planeta Zemlja ima nepravilan oblik koji je „sličan samome sebi“ i koji je na osnovu toga nazvan geoid. Prilikom svih računanja na Zemlji, oblik geoida se aproksimira geometrijski pravilnijim oblicima, na kojima je moguće vršiti mjerenja, a to su rotacioni elipsoid i/ili lopta. U skladu s tim, u radu će biti izvršena računanja dužina lukova meridijana i paralela između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine: na Zemljinom elipsoidu i lopti. Dužina luka meridijana između krajnjih tačaka po geografskoj širini predstavlja ekstremnu udaljenost između sjeverne i

¹ SG/LJ FBiH 15, str. 35.

južne tačke. Dužina luka paralele između krajnjih tačaka po geografskoj dužini predstavlja najveću udaljenost između istočne i zapadne tačke. Mjerenja na elipsoidu su preciznija i kompleksnija ali će se radi potvrde tačnosti dobivenih rezultata izvesti i računanja na lopti. Koristit će se parametri Zemljinog referentnog elipsoida do kojih je došao Bessel (Bessel 1841). Načini izračunavanja dužina lukova koncizno su objašnjeni u Torge i Müller (2012:8).

2 MATERIJALI I METODE

U radu su primjenjeni analitičko-sintetički i matematičko-kartografski metod. Analitičko - sintetički metod je primaran, od pripreme podataka, analize, sinteze rezultata i izvođenja zaključaka. Matematičko - kartografski metod je primjenjen za izračunavanje dužina između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine, posebno na Zemlji kao lopti i na Zemljinom elipsoidu. Karta geografskog položaja koordinata krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine (Slika 1) nacrtana je u Gauss - Krügerovoj kartografskoj projekciji pomoću softvera CorelDrawX7.

Parametri Zemljinog referentnog elipsoida do kojih je došao Bessel (Bessel 1841), a koji su bili neophodni za dobivanje rezultata u ovom radu su:

- velika poluosa $a = 6\,377\,397,155$ m,
- prvi ekscentricitet $e = 0,006674372230614$,
- srednji poluprečnik Zemlje kao lopte po ekvatoru = $6\,370\,290$ m.

Dužinu luka meridijana na Zemljinom elipsoidu izračunata je na tri različita načina radi usporedbe rezultata. Jednačina za izračunavanje dužine luka meridijana od ekvatora ($\varphi = 0^\circ$) do neke geografske širine (φ) glasi prema Čubranić (1974):

$$D = 111\,120,61962 \cdot \varphi - 15988,63853 \cdot \sin 2\varphi + 16,7299538 \cdot \sin 4\varphi - 0,02178480 \cdot \sin 6\varphi + 0,000\,030\,766 \cdot \sin 8\varphi. \quad (1)$$

Dužina (D) se dobiva u metrima.

Izračunavanje dužine luka meridijana između dvije poznate geografske širine prema metodu koji je predložio Čubranić (1974), radi se na sljedeći način:

$$D_{(\varphi_1 - \varphi_2)} = 111\,120,61962 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) - 15988,63853 \cdot (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + 16,72995 \cdot (\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) - 0,02178 \cdot (\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1). \quad (2)$$

U jednačini (2), φ_1 i φ_2 su geografske širine graničnih paralela između kojih se izračunava udaljenost. Treći način za računanje dužine luka meridijana između dvije paralele glasi:

$$S_m = \frac{\Delta\varphi''}{\frac{\rho''}{M}}, \quad (3)$$

gdje su elementi u jednačini:

$\Delta\varphi''$ – uslovljena razlika geografskih širina,

ρ'' – vrijednost radijana,

M – poluprečnik krivine po meridijanu.

Poluprečnik krivine glavnog normalnog presjeka po meridijanu (M) računa se primjenom sljedećeg obrasca, prema Weinrit (2013):

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (4)$$

Dužina luka paralele na elipsoidu izračunata je po sljedećem izrazu:

$$S_p = \frac{\Delta\lambda''}{\frac{\rho''}{N}} \cdot \cos \varphi,$$

gdje su:

$\Delta\lambda''$ – uslovljena razlika geografskih dužina,

ρ'' – vrijednost radijana,

N – poluprečnik zakrivljenosti po prvom vertikalu,

φ – geografska širina odnosno paralele.

(5)

N predstavlja poluprečnik zakrivljenosti po prvom vertikalu. Računa se pomoću sljedeće jednačine prema Tseng, Guo i Liu (2015):

$$N_\varphi = a / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}, \quad (6)$$

Nakon izračunavanja vrijednosti dužina lukova meridijana i paralela između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine na Zemljinom elipsoidu, u cilju uspoređivanja dobivenih rezultata, izračunate su iste dužine aproksimirajući Zemlju loptom. Prilikom računanja na Zemljinoj lopti, korišten je srednji poluprečnik po ekvatoru, čija dužina iznosi 6 370 290 m.

Dužina meridijanskog luka na Zemljinoj lopti izračunata je primjenom jednačine koju je ponudio Gašparović (1969):

$$l_m = \frac{\Delta\varphi'' \cdot R}{\rho''}, \quad (7)$$

gdje su:

$\Delta\varphi''$ – uslovljena razlika geografskih širina,

R – srednji poluprečnik lopte sa površinom jednakom površini elipsoida (6 370 290 m),

ρ'' = vrijednost radijana.

Dužina luka paralele na Zemljinoj sferi, prema Gašparović (1969), izračunata je pomoću sljedeće jednačine:

$$l_\varphi = \frac{\Delta\lambda'' \cdot R}{\rho''} \cdot \cos\varphi, \quad (8)$$

gdje su:

$\Delta\lambda''$ – uslovljena razlika geografskih dužina,

R – srednji poluprečnik lopte sa površinom jednakom površini elipsoida (6 370 290m).

ρ'' – vrijednost radijana,

φ – geografska širina odnosno paralele.

3 REZULTATI I DISKUSIJA

U ovom poglavlju prezentovani su rezultati do kojih se došlo. Prvo će biti prikazani rezultati dobiveni izračunavanjima dužina lukova meridijana i paralela, ili udaljenosti između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine, aproksimirajući Zemlju elipsoidom a nakon toga će biti izvedena računanja i prezentovani rezultati na Zemlji kao lopti.

3.1 Dužina luka meridijana na elipsoidu

Dužine meridijanskih lukova između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine (Podštirovnik - Gradina Donja), predstavljaju odsječke između paralela istih ovih tačaka. Geografske širine ili paralele na kojima leže ove tačke imaju sljedeće vrijednosti:

$\varphi_1 = 42^\circ, 55$ (geografska širina Podštirovnik),

$\varphi_2 = 45^\circ, 275$ (geografska širina Gradina Donja).

Računajući prema obrascu (1), dobivene su sljedeće vrijednosti.

- udaljenost od ekvatora φ_0 do $\varphi_1 = 42^\circ 33'$ iznosi 4 712 255,03 m,
- udaljenost od ekvatora φ_0 do $\varphi_2 = 45^\circ 16' 30''$ iznosi 5 014 997,85 m.

Razlika ove dvije udaljenosti daje raspon krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine pravcem sjever – jug. Udaljenost krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine pravcem sjever-jug izračunata na ovaj način iznosi 302 742,82 m.

Rezultat dužine luka meridijana između dvije poznate geografske širine, dobiven primjenom navedene jednačine (2), u potpunosti se poklapa sa rezultatom dobivenim primjenom jednačine (1). Dobivena je udaljenost od 302 742,82 m.

Primjenom jednačine (3) potrebno je bilo prvo izračunati poluprečnik krivine glavnog normalnog presjeka po meridijanu (M) za što je poslužila jednačina (4). Dobivena vrijednost poluprečnika zakrivljenosti glavnog normalnog presjeka pa meridijanu $M = 6\,365\,462,21$ m umetnuta je u jednačinu (3). Dužina luka meridijana između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine iznosi: 302 742,15 m.

Izračunavanjem dužine luka meridijana između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine, na tri načina, aproksimirajući Zemlju elipsoidom, rezultati se značajno ne mijenjaju. Razlika je u 0,68 m što je neznatno i zanemarivo.

3.2 Dužina luka paralele na elipsoidu

Dužina luka paralele na elipsoidu izračunata je po jednačini (5) gdje se prvo morao izračunati poluprečnik zakrivljenosti po prvom vertikalumu prema jednačini (6):

$$N_{\varphi_1} = 6\,387\,710,59 \text{ m,}$$

$$N_{\varphi_2} = 6\,387\,999,81 \text{ m.}$$

Nakon izračunatih poluprečnika zakrivljenosti po prvom vertikalumu za obje geografske širine, dobivene vrijednosti su poslužile za izračunavanje dužina lukova paralela između meridijana. Računanje dužina lukova paralela na kojima leže najistočnija i najzapadnija tačka Bosne i Hercegovine je neophodno, jer tačke ne leže na istoj paraleli. Konvergencija meridijana uzrokuje smanjenje dužina lukova paralela između dva ista meridijana od ekvatora prema geografskim polovima, odnosno od južnije ka sjevernijoj tački u ovom slučaju.

U nastavku su prikazani rezultati dužina lukova paralela između meridijana najistočnije (Bratunac, Žlijebac) tačke i najzapadnije (Bihać, Bugar) tačke za $S_{p_{\varphi_1}}$ - dužina luka paralele koja prolazi kroz naselje Žlijebac i $S_{p_{\varphi_2}}$ - dužina luka paralele koja prolazi kroz naselje Bugar:

$$S_{p_{\varphi_1}} = 312\,080,00 \text{ m,}$$

$$S_{p_{\varphi_2}} = 307\,981,94 \text{ m.}$$

Nakon dobivenih rezultata, izračunata je aritmetička sredina dužina lukova paralela između meridijana krajnje istočne i zapadne tačke Bosne i Hercegovine, koja iznosi:

$$\bar{S} = \frac{S_{p_{\varphi_1}} + S_{p_{\varphi_2}}}{2} = 310\,030,97 \text{ m.}$$

Na osnovu sprovedenog postupka, može se zaključiti da je srednja vrijednost udaljenosti između krajnje najistočnije i najzapadnije tačke, koja se može prihvatiti kao referentna 310030,97 m.

3.3 Dužina luka meridijana na lopti

Dužina meridijanskog luka između krajnje sjeverne i južne tačke Bosne i Hercegovine, smatrajući Zemlju loptom (7) iznosi:

$$l_m = 302\,971,76 \text{ m.}$$

3.4 Dužina luka paralele na lopti

Dužina luka paralele je izračunata korištenjem jednačine (8). Kao i kod već objašnjenog načina računanja, aproksimirajući Zemlju elipsoidom, dužina lukova paralela na kojima leže najistočnija i najzapadnija tačka Bosne i Hercegovine, moraju se izračunati dužine lukova paralela na kojima leže obje tačke. U nastavku su prikazani dobiveni rezultati za dužinu lukova paralela između meridijana l_{φ_1} - dužina luka paralele koja prolazi kroz naselje Žlijebac i l_{φ_2} - dužina luka paralele koja prolazi kroz naselje Bugar.

$$l_{\varphi_1} = 311\,228,89 \text{ m,}$$

$$l_{\varphi_2} = 307\,128,11 \text{ m.}$$

Izračunata je i aritmetička sredina (l_p) dužine lukova paralela između meridijana krajnje istočne i zapadne tačke Bosne i Hercegovine, koja iznosi:

$$l_p = \frac{l_{\varphi_1} + l_{\varphi_2}}{2} = 309\,178,50 \text{ m.}$$

Na kraju je prezentovan sumarni prikaz udaljenosti između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine smatrajući Zemlju elipsoidom i loptom (Tabela 1).

Tabela 1.

Udaljenosti između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine

Pravac	Elipsoid (m)	Lopta (m)	Razlika (m)
Sjever – jug	302 742,15	302 971,76	-229,61
Istok – zapad	310 030,97	309 178,50	852,47

Iz prikazanih podataka u tabeli 1, vidi se da nema većih odstupanja u računanju na elipsoidu i lopti. Pravcem sjever - jug dobiveni raspon između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine se razlikuje za 229,61 m (duži je na lopti). Pravcem istok – zapad također nema značajnijih odstupanja, razlika je u 852,47 m, za koju vrijednost je veća dužina na elipsoidu u odnosu na loptu.

Zvanični podaci o rasponu krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine publikuju se u Statističkim godišnjacima Federacije Bosne i Hercegovine (Federalni zavod za..., 2015), u dijelu koji se odnosi na podatke o državi Bosni i Hercegovini (Tabela 2). Prema Federalnom zavodu za... (2015), zračna udaljenost po geografskoj širini i dužini: Gradina Donja – Podštirovnik je 02°43'30" ili 314 km a Žlijebac – Bugar 03°53'41" ili 309 km².

Tabela 2.

Astronomsko-geografski položaj Bosne i Hercegovine³

Općina	Geografska širina (φ)	Geografska dužina (λ)	Naziv naselja	Položaj tačke
Bosanska Dubica	45°16'30"	16°55'56"	Gradina Donja	Sjever
Trebinje	42°33'00"	18°32'24"	Podštirovnik	Jug
Bratunac	44°03'00"	19°37'41"	Žlijebac	Istok
Bihać	44°49'30"	15°44'00"	Bugar	Zapad

Uglovne vrijednosti razlika po geografskoj širini i dužini između ekstremnih tačaka Bosne i Hercegovine su dobro izračunate.

Kod navedenih dužina između ovih tačaka postoji odstupanje u poređenju sa dobivenim vrijednostima. Udaljenost između najistočnije tačke u naselju Žlijebac i najzapadnije tačke u naselju Bugar je dobro izračunata. Zaokružena je na 309 km što je sasvim zadovoljavajući podatak s obzirom na njegovu namjenu kao opće informacije.

Udaljenost između krajnje sjeverne tačke u naselju Gradina Donja i krajnje južne tačke u naselju Podštirovnik odstupa od dobivenih vrijednosti. Udaljenosti između ovih tačaka iznose

² SG/LJ FBiH 15, str. 35.

³ SG/LJ FBiH 15, str. 35.

302 742,15 m na elipsoidu i 302 971,76 m na Zemlji kao lopti. Ove vrijednosti se mogu zaokružiti na 303 km. Vrijednost zvanične udaljenosti od 314 km nije realna.

Pojednostavljeno, ako se uzme da je srednja vrijednost 1° meridijanskog luka 111 111 m, i ako se uglovnu vrijednost razlike geografskih širina od $02^\circ 43' 30''$ pomnoži sa 111 111 m dobit će se 302 777,50 m. Ovdje se radi, ili o greški u proračunu ili o štamparskoj greški, koja se dugi niz godina „provlači“. Ne ulazeći u razloge, ova netačna vrijednost se mora otkloniti i u državi Bosni i Hercegovini se trebaju koristiti tačni podaci o njezinim dimenzijama, odnosno o udaljenostima između njezinih krajnjih tačaka.

4 ZAKLJUČAK

Na početku rada postavljena je osnovna hipoteza koja je glasila da zvanični podaci o udaljenostima između krajnjih tačaka Bosne i Hercegovine nisu tačni i da se trebaju korigovati. Na kraju sprovedenog istraživanja, možemo zaključiti da se postavljena hipoteza može prihvatiti ali ne u cjelosti jer je dio podataka tačan, a dio je netačan. Tačan je podatak o udaljenosti između najistočnije tačke u naselju Žlijebac i najzapadnije tačke u naselju Bugar. Nije tačan podatak o udaljenosti između krajnje sjeverne tačke u naselju Gradina Donja i krajnje južne tačke u naselju Podštirovnik.

Bosna i Hercegovina mora imati precizne podatke o udaljenosti između njezinih krajnjih tačaka jer se taj podatak prezentuje u „ličnoj karti“ države i na osnovu njega dobivamo konture i veličinu države. U udžbenicima geografije Bosne i Hercegovine (završni razredi u osnovnim i srednjim školama gdje se proučava nacionalna geografija Bosne i Hercegovine), već nekoliko desetljeća „vrte“ se ovi podaci koji se moraju korigovati. Kao primjer može poslužiti, Geografija za 9. razred devetogodišnje osnovne škole autorice Grete Župančić i Izdavačke kuće „Nova dječija knjiga“ Sarajevo, 2015. godina, gdje se na stranici 28. može naći ovaj podatak. Korekcija je nužna i u budućim izdanjima Statističkih godišnjaka/ljetopisa Federacije Bosne i Hercegovine, kao i u svim drugim publikacijama gdje se ovaj podatak spominje. Stoga je vrijeme da se ta greška ispravi i da se učenicima, studentima, naučnoj zajednici, građanima i prijateljima Bosne i Hercegovine ponudi validan podatak o njezinim dimenzijama.

LITERATURA I IZVORI

Čubranić, N. (1974). *Viša geodezija (II dio)*. Zagreb: Tehnička knjiga.

Gašparević, R. (1969). *Matematička geografija*. Sarajevo: Geografsko društvo SR Bosne i Hercegovine.

Federalni zavod za statistiku (2015). *Statistički godišnjak/ljetopis Federacije Bosne i Hercegovine 2015. godine SG/LJ FBiH 15*. Sarajevo: Federalni zavod za statistiku.

Torge, W. i Müller, J. (2012). *Geodesy, 4th Edition*. Berlin/Boston: De Gruyter.

Tseng, W., Guo, J., Liu, C. (2015). The geometric algorithm of inverse and direct problems with an area solution for the great elliptic arcs, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 23, No. 4, pp. 481-490. DOI: 10.6119/JMST-014-1120-1

Weintrit A. (2013). So, What is Actually the Distance from the Equator to the Pole? – Overview of the Meridian Distance Approximations. *TransNav-the International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, 7(2), 259-272. DOI: 10.12716/1001.07.02.14

Župančić G. (2015). *Geografija za 9. razred devetogodišnje osnovne škole*. Sarajevo: Nova dječija knjiga.

Autor:

Dr. sc. Edin Hadžimustafić, docent

Univerzitet u Tuzli

Prirodno-matematički fakultet

Odsjek za geografiju

Univerzitetska 4, 75 000 Tuzla

Bosna i Hercegovina

e-mail: edin.hadzimustafic@untz.ba